



Couplage symétrique éléments finis-éléments de frontière en mécanique: formulation et implantation dans un code éléments finis.

Saida Mouhoubi

► To cite this version:

Saida Mouhoubi. Couplage symétrique éléments finis-éléments de frontière en mécanique: formulation et implantation dans un code éléments finis.. Matériaux. Université de Limoges, 2000. Français. NNT: . tel-00550207

HAL Id: tel-00550207

<https://theses.hal.science/tel-00550207>

Submitted on 24 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LIMOGES
ECOLE DOCTORALE
SCIENCES, TECHNOLOGIE ET SANTE

Thèse
présentée pour obtenir le grade de
Docteur d'Université
Discipline : Génie Civil

par
Saïda MOUHOUBI

COUPLAGE SYMÉTRIQUE
ÉLÉMENTS FINIS - ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE
EN MÉCANIQUE : FORMULATION ET IMPLANTATION
DANS UN CODE ÉLÉMENTS FINIS.

soutenue publiquement le 19 décembre 2000

JURY

M.H. ALIABADI	Professeur, Queen Mary University, Londres	Rapporteur
M. BONNET	Directeur de recherche, Ecole Polytechnique	Examinateur
D. KONDO	Professeur, Université de Lille	Rapporteur
A. MILLARD	Ingénieur de recherche, C.E.A de Saclay	Examinateur
C. PETIT	Professeur, Université de Limoges	Examinateur
L. ULMET	Maître de Conférences, Université de Limoges	Examinateur

UNIVERSITE DE LIMOGES
ECOLE DOCTORALE
SCIENCES, TECHNOLOGIE ET SANTE

Thèse
présentée pour obtenir le grade de
Docteur d'Université
Discipline : Génie Civil
par
Saïda MOUHOUBI

COUPLAGE SYMÉTRIQUE
ÉLÉMENTS FINIS - ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE
EN MÉCANIQUE : FORMULATION ET IMPLANTATION
DANS UN CODE ÉLÉMENTS FINIS.

soutenue publiquement le 19 décembre 2000

JURY

M.H. ALIABADI	Professeur, Queen Mary University, Londres	Rapporteur
M. BONNET	Directeur de recherche, Ecole Polytechnique	Examinateur
D. KONDO	Professeur, Université de Lille	Rapporteur
A. MILLARD	Ingénieur de recherche, C.E.A de Saclay	Examinateur
C. PETIT	Professeur, Université de Limoges	Examinateur
L. ULMET	Maître de Conférences, Université de Limoges	Examinateur

REMERCIEMENTS

Mes travaux de thèse ont été effectués au Laboratoire de Modélisation Mécanique des Matériaux et des Structures du Génie Civil d'Egletons sous la direction de Christophe PETIT et l'encadrement scientifique de messieurs Laurent ULMET et Marc BONNET.

Je remercie monsieur Christophe PETIT directeur du Laboratoire de Modélisation Mécanique des Matériaux et des Structures du Génie Civil d'Egletons, pour m'avoir acceptée dans son équipe et sa bienveillance à ce que tous les moyens soient mis à ma disposition pour que mon travail puisse s'effectuer dans de très bonnes conditions.

Messieurs Laurent ULMET et Marc BONNET ont remarquablement encadré et soutenu mon travail. Leurs conseils, soutiens, orientations et contributions tiennent une part très importante dans la réussite de ce travail, qu'ils trouvent à travers ces quelques mots l'expression de toute ma reconnaissance et de mon amitié.

Je remercie vivement messieurs Djimédo KONDO et M.H ALIABADI pour leur contributions en tant que rapporteurs de cette thèse et monsieur Alain Millard pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie les membres du laboratoire 3MSGC d'Egletons pour m'avoir acceptée parmi eux durant ces quelques années et une pensée bien amicale va à Makrem ARFAOUI pour avoir été toujours à mes côtés.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à tous mes collègues du département de Génie Civil d'Egletons de l'IUT de Limoges, pour leur très bon accueil. Je remercie tout particulièrement messieurs Jean-Pierre PEYROT et Jean-Jacques MAINETTI pour m'avoir bien aidée à faire mes premiers pas dans le monde de l'enseignement.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe du laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique pour m'avoir bien accueillie durant mes séjours de travail.

RESUME

Ce travail traite d'une formulation pour l'étude du couplage symétrique entre éléments finis et éléments de frontière en mécanique. La formulation ainsi décrite, est basée sur l'adaptation des méthodes intégrales variationnelles de Galerkin entièrement régularisées en élasticité tridimensionnelle et s'appuie sur la construction de la matrice de rigidité d'un *macro-élément* représentant un domaine élastostatique tridimensionnel sans forces de volume. La procédure de couplage mise en oeuvre présente l'avantage d'être symétrique et a été implantée avec succès dans les environnements éléments finis de CAST3M.

Dans le cadre du traitement des double intégrales de surface, un nouveau schéma d'intégration singulière respectant parfaitement la symétrie des formulations intégrales variationnelles mises en jeu, a été développé et présenté dans le cadre de ce travail.

L'application directe de la méthode des éléments de frontière traditionnelle dite des *collocations* pour modéliser les solides fissurés conduit à la dégénérescence de la formulation numérique. Une des alternatives consiste à appliquer l'approche variationnelle. Une formulation intégrale variationnelle adaptée à l'étude d'un domaine élastique tridimensionnel présentant une fissure interne non débouchante a été développée dans le cadre de ce travail. Le développement et l'implantation de la matrice de rigidité du macro-élément fissuré en termes de degrés de liberté en déplacement sur la frontière externe du domaine et en saut de déplacement sur la surface propre à la fissure, nous ont permis de procéder à une validation numérique portant sur un barreau cylindrique présentant une fissure circulaire, centrée, en mode I et non débouchante.

Nous proposons également une formulation intégrale variationnelle pour l'étude d'un domaine semi-infini à surface partiellement libre et contenant une zone de non linéarités. L'utilisation des solutions fondamentales de Mindlin permettent, dans le cas de la modélisation d'un espace *semi-infini*, de réduire les supports géométriques à discrétiser dans le domaine éléments de frontière. Une perspective intéressante serait son implantation numérique afin de réaliser une application réelle sur un problème de géotechnique.

Mots clefs

Couplage symétrique, équations intégrales, méthode des éléments finis, macro-élément, formulations variationnelles de Galerkin régularisées, élasticité tridimensionnelle, mécanique de la rupture, milieux semi-infinis.

ABSTRACT

This study deals with the finite element method and the boundary element method coupling in mechanics. The formulation thus described is based on the use of the three dimensional regularized Galerkin integral formulations in elasticity and consists in constructing of a macro-element stiffness matrix. The integral macro-element represents in this case a three dimensional elastic domain without any body forces. The coupling procedure is symmetric and it has been implemented in CAST3M finite elements packages.

In order to evaluate correctly the double surface integrals in which the inner is singular, a new singular integration scheme has been developed and presented in the framework of this study. This singular integration scheme respects perfectly the symmetric character of the Galerkin integral formulations.

In the other way, numerical procedures based upon boundary integral equations are attractive for modeling crack problems due to the fact that, in the absence of body forces, only the crack surface and the boundaries of the domain require discretization. Unfortunately, when applied to crack modeling *collocations* boundary element methods become mathematically degenerate. In order to overcome this difficulty the symmetric Galerkin Strategy is extended to modeling crack problems. We have assumed that the crack doesn't intersect the boundary of the elastic domain. The loading in the crack is assumed to be such that the traction applied to the upper crack surface is equal and opposite to the lower one. This includes, as a special case, the common condition that the crack faces are free. The development of the integral cracked macro-element and its numerical implementation have lead to a validation study on a three dimensional cylindrical body containing an embedded circular fracture with mode I conditions.

In the last part of this study, a methodology for *semi-infinite* problems analysis is exposed. A *semi-infinite* medium with a partially loaded surface and deprived of a nonlinear cavity is considered. The boundary of this cavity must constitute the interface with the finite subdomain discretized by finite elements.

Keywords

Symmetric coupling, integral equations, finite elements method, macro-element, regularized Galerkin variational formulations, three dimensional elasticity, fracture mechanics analysis, semi-infinite analysis.

Table des Matières

Chapitre I	Introduction générale	9
Chapitre II	Méthodes des équations intégrales	17
II.1	Introduction	17
II.2	Définitions et notations	17
II.3	Principe des méthodes intégrales	18
II.4	Equations intégrales de frontière pour l'élastostatique linéaire	19
II.4.1	Représentation intégrale des champs élastiques	22
II.4.2	Equation intégrale régularisée en déplacement	24
II.4.3	Equation intégrale de frontière en traction	26
II.5	Formulations intégrales variationnelles	26
II.5.1	Principe	26
II.5.2	Fonctionnelle de l'énergie potentielle	27
II.5.3	Fonctionnelle de l'énergie potentielle sous sa forme faible	28
II.5.4	Construction de la formulation variationnelle intégrale	29
II.5.5	Problème de Dirichlet	36
II.5.6	Problème de Neumann	36
II.6	Conclusion	37
Chapitre III	Couplage éléments de frontière - éléments finis	39
III.1	Introduction	39
III.2	Couplage par la méthode des collocations	40
III.3	Couplage par les formulations intégrales variationnelles	42
III.3.1	Energie de frontière du domaine	42
III.3.2	Construction par approche intégrale variationnelle	45

III.3.3	Construction de la matrice de rigidité	47
III.3.4	Propriétés de la matrice \mathbf{K}_{SE}	48
III.4	Conclusion	49
Chapitre IV	Mise en oeuvre numérique	51
IV.1	Introduction	51
IV.2	Méthode des éléments de frontière	51
IV.3	Résolution par approche par collocations	53
IV.3.1	Construction du système d'équations	55
IV.4	Résolution par approche variationnelle	55
IV.4.1	Approximation des fonctions test	56
IV.4.2	Discrétisation et évaluation des doubles intégrales	56
IV.4.3	Intégration régulière	57
IV.4.4	Intégration singulière non symétrique	58
IV.4.5	Intégration singulière symétrique	60
IV.4.6	Evaluation numérique des intégrales	67
IV.5	Construction matricielle	68
IV.6	Optimisation de la phase d'intégration	71
IV.7	Conclusion	73
Chapitre V	Validations numériques	75
V.1	Introduction	75
V.2	Sphère sous une pression externe uniforme	75
V.3	Cavité sphérique en milieu infini	76
V.3.1	Description de l'étude	77
V.3.2	Etude numérique	78
V.3.3	Conclusions et commentaires	79
V.4	Cylindre sous pression interne uniforme	83
V.4.1	Description de l'étude	83
V.4.2	Etude numérique	84
V.4.3	Conclusions et commentaires	85
V.5	Temps d'intégration	86
V.6	Conclusion	89
Chapitre VI	Extension à la mécanique de la rupture	95
VI.1	Introduction	95

VI.2	Difficultés de modélisation des fissures	96
VI.3	Formulations variationnelles pour les solides élastiques fissurés	96
VI.3.1	Couplage avec la méthode des éléments finis	103
VI.3.2	Implantation numérique	105
VI.3.3	Conclusion et perspectives	109
Chapitre VII	Extension à étude de l'interaction sol-structure	111
VII.1	Introduction	111
VII.2	Description du problème	112
VII.2.1	Les solutions fondamentales de Mindlin	113
VII.3	Demi-espace à surface partiellement libre	114
VII.3.1	Formulations intégrales variationnelles du problème	114
VII.3.2	Couplage avec les éléments finis	116
VII.4	Conclusion	118
Chapitre VIII	Conclusion générale	119
	Références bibliographiques	121
Annexe A	Expression du rotationnel surfacique	129
Annexe B	Régularisation de premier ordre	131
Annexe C	Détails de programmation de l'opérateur EIVAR	135
C. 1	L'opérateur EIVAR	135
C. 1.1	Syntaxe d'appel	136
C. 1.2	Structuration de l'opérateur EIVAR	136
C. 2	Création du nouvel objet rigidité	137
C. 3	Sous programme EISNOR	139
C. 3.1	Principe de l'algorithme	140
C. 4	Sous programme EINDDL	142
C. 4.1	Principe de l'algorithme	142
Annexe D	Solutions fondamentales de Mindlin	145

Chapitre I

Introduction générale

Eléments Finis et Eléments de Frontière

De nos jours la méthode des éléments finis est incontestablement la plus utilisée, les domaines d'application qui lui font appel sont très nombreux et variés et les ouvrages la décrivant sont assez répandus [8, 36, 79]. Les bases formulant cette méthode ne seront donc pas rappelées dans ce mémoire. Nous nous contenterons juste de rappeler que cette méthode consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues, pour transformer les équations aux dérivées partielles qui décrivent le comportement des systèmes physiques étudiés en équations algébriques. Cette méthode fait appel à la discrétisation de tout l'intérieur du domaine étudié, ce qui rend parfois la définition de la géométrie assez complexe. Cette particularité constitue une sérieuse limitation et un grand obstacle sur lesquels bute la méthode. La méthode des éléments finis est basée sur la minimisation de la fonctionnelle de l'énergie potentielle du domaine étudié, au moyen d'un principe variationnel. Cette technique conduit à la construction d'une matrice de rigidité symétrique présentant une structure de bande.

La méthode des éléments de frontière repose quant à elle, sur la discrétisation des équations intégrales de frontière et utilise les mêmes notions que la méthode des éléments finis à savoir maillage, interpolation par fonctions de forme, etc. Les méthodes intégrales font appel à l'utilisation d'une *solution fondamentale*, satisfaisant les équations de base à l'intérieur du domaine et qui permet une résolution du problème uniquement sur la frontière. Il suffit donc d'une discrétisation sur la frontière du domaine pour définir la géométrie. Ce gain d'une dimension de l'espace lors de la discrétisation constitue un des principaux avantages des méthodes intégrales. Ces dernières trouvent leur efficacité maximale dans le traitement des problèmes linéaires et homogènes ou grossièrement hétérogènes, dans lesquels le domaine peut être infini ou dont le rapport *volume/surface* est important. Néanmoins, jusqu'à ce jour ces méthodes intégrales demeurent peu répandues et d'application très réduite dans le traitement des problèmes où l'influence du comportement non linéaire du matériau dans certaines régions du milieu est importante.

Nécessité et approches de couplage

Le recours à la construction d'une méthode mixte couplant les deux méthodes citées ci dessus est probablement le meilleur moyen pour réunir leurs compétences respectives. Dans certains problèmes, où les champs de compétences des deux méthodes trouvent ample utilité simultanément, il s'avère judicieux de subdiviser le domaine d'étude en deux sous domaines : le premier, par exemple, hétérogène et non linéaire, le deuxième linéaire et éventuellement infini, semi infini ou sujet à de fortes concentrations de contraintes. Dans ce cas l'utilisation de la méthodes des éléments finis pour approximer le premier sous domaine et la méthode des éléments de frontière pour le second conduit à utiliser le couplage entre les deux méthodes d'une façon optimale. Le couplage ainsi décrit consiste à assembler les deux sous domaines de manière à assurer la continuité des déplacements et des tensions sur les frontières communes aux deux sous domaines considérés. Plusieurs voies peuvent être explorées en vue de mener à bon terme une telle étude. Ainsi, deux grandes approches de couplage sont exposées dans la littérature [81, 80, 10, 23, 9].

- ◊ Dans la première, la région discrétisée par éléments de frontière est traitée comme un *super élément fini* et sa matrice de rigidité est implantée dans un *environnement numérique* décrit par des éléments finis.
- ◊ Dans la seconde, la région décrite par la méthode des éléments finis est considérée comme équivalente à une région discrétisée par la méthode des éléments de frontière. La matrice de rigidité ainsi calculée est introduite dans un *environnement numérique* cette fois, décrit par la méthodes des éléments de frontière.

APPROCHE DE COUPLAGE RETENUE

Le choix de la méthode de couplage dépend essentiellement des environnements numériques déjà disponibles et opérationnels. Dans le cadre de la présente étude, la première approche a été retenue tout en adoptant comme support numérique le code de calcul *CAST3M*. La méthode des éléments finis conduit à la construction d'une relation entre les déplacements évalués aux noeuds et les *forces nodales*. La méthode des éléments de frontière utilise quant à elle une relation entre les déplacements aux noeuds et les *tensions nodales*. Pour construire un tel super élément en respectant la première approche proposée, il est indispensable de traiter le domaine décrit par les éléments de frontière comme un élément fini et transformer la relation *déplacements nodaux – tensions nodales*, qui résulte naturellement de l'étape de discrétisation par éléments de frontière, en une relation de type *déplacements nodaux – forces nodales*.

Etat des connaissances dans le domaine du couplage

Les premiers travaux qui traitent de cet aspect en élasticité remontent à plus d'une vingtaine d'années et sont décrits dans les travaux de Zienkiewicz [80] et un peu plus tard dans ceux de Brebbia, Kelly et al [23, 44]. Le domaine support du problème étudié est divisé en deux sous domaines, l'un représenté par des éléments finis et l'autre par des équations intégrales de frontière. L'idée principale de ces auteurs est la construction d'une matrice de rigidité du domaine décrit par les équations intégrales et de l'assembler par la suite à celle du domaine complémentaire discrétisé par éléments finis. Ces travaux se sont heurtés à une difficulté majeure qui réside dans l'impossibilité d'obtenir une matrice de rigidité symétrique en utilisant la méthode des éléments de frontière conventionnelle directe basée sur l'approche par collocations. La méthode de *symétrisation forcée* pour les systèmes d'équations non symétriques obtenus [80, 43, 45, 51, 41] a fait l'objet de nombreuses critiques [7, 11, 48, 70], du fait que les résultats numériques la caractérisant restent médiocres et ce point a été aussi mis en évidence dans le cadre de notre étude. Des procédures de couplage se basant sur l'utilisation d'un même principe variationnel pour les deux sous domaines de façon à obtenir des systèmes d'équations de type *Euler-Lagrange* avec conditions de continuité à l'interface prises naturellement comme conditions aux limites ont été développées dans [11, 12, 13]. Dans ce même contexte, la méthode des éléments de frontière symétrique de Galerkin a été proposée pour l'étude du couplage avec la méthode des éléments finis dans [31, 30, 40]. Les procédures de couplage entre les méthodes des éléments finis et des éléments de frontière ont fait l'objet de plusieurs travaux notamment pour modéliser l'interaction *sol-structure* [3, 4] ou l'interaction *sol-fluide-structure* décrits par [29], sous effet d'action sismique. Les éléments finis sont utilisés dans ce cas pour approcher la structure et les éléments de frontière pour approximer le sol et le fluide. Les travaux exposés par ces auteurs utilisent l'approche des sous-domaines exposée dans [28]. Des approches de couplage avec des exemples numériques à l'appui pour l'étude des interfaces *fluide-structure*, ont été largement présentées dans [76, 77, 78]. Des travaux traitant de l'étude du couplage *éléments de frontière-éléments finis* en utilisant l'approche de Galerkin sont donnés dans [39]. Ces travaux sont très récents et demeurent en cours. Ces auteurs ont adopté une démarche similaire à la notre.

Objectifs

Le travail de thèse poursuivi au Laboratoire de Modélisation Mécanique des Matériaux et des Structures du Génie Civil d'Egletons (L3MSGC), et en étroite collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des solides de l'école Polytechnique a été financièrement soutenu par le Conseil Régional du Limousin. L'objectif assigné est l'implantation d'une procédure de cou-

plage symétrique *éléments finis-éléments de frontière* dans le code numérique aux éléments finis CAST3M. Nos principaux objectifs de départ étaient les suivants :

- ◊ Explorer les méthodes intégrales symétriques de Galerkin et plus exactement celles qui dérivent d'un principe variationnel [16, 17, 18], à travers une synthèse bibliographique.
- ◊ Développer une procédure de couplage à travers la construction de la matrice de rigidité d'un super-élément intégral utilisant cette approche et l'implanter par la suite dans le code aux éléments finis CAST3M.
- ◊ Etendre ces mêmes formulations variationnelles à l'étude d'un domaine élastique fissuré et construire une procédure de couplage avec les éléments finis en tenant compte de la présence de la fissure. Ce dernier point s'insère dans la continuité des travaux de thèse menés au sein de notre laboratoire [22] et qui portent sur la modélisation des fissures par éléments de frontière.

Le support numérique

Les développements en éléments de frontière introduits dans le cadre de ce travail ont pour finalité d'être compatibles avec les environnements éléments finis mis en oeuvre dans le code de calcul numérique CAST3M. Un tel choix est pleinement justifié par le fait que le code CAST3M reste le *grand outil* de travail de notre équipe et ses environnements demeurent ouverts à l'ensemble de la communauté des scientifiques et des universitaires en France. Tout développement dans CAST3M peut avoir des retombées bénéfiques sur l'ensemble de ses utilisateurs. Ce logiciel de calcul permet de traiter une large gamme de problèmes complexes par la méthode des éléments finis. Il a été développé dans les locaux du Département de Mécanique et de Technologie du haut commissariat français de l'énergie atomique.

Implantation dans CAST3M

CAST3M est un code orienté OBJET, ce qui a permis une facilité dans la gestion des données lors de nos développements. Pour construire nos algorithmes en respectant cette hiérarchie, il a fallu donc structurer nos données en conséquence. Toute la difficulté résidait alors dans la compréhension et la connaissance des traitements déjà existants pour pouvoir mener correctement les différentes phases d'implantation de notre super-élément discrétisé par équations intégrales. Nous avons eu, le long de notre travail, à modifier des objets déjà existants, à en créer des nouveaux, ce qui a nécessité un travail de programmation lourd et important. L'acquisition des structures des différentes données et donc le contenu de ces objets sont exploités par le nouvel opérateur *équations intégrales* EIVAR qui évaluera la matrice de rigidité du super-élément

intégral et communiquera ses résultats à l'utilisateur. La création du nouvel opérateur EIVAR dans ce code n'a pas nécessité la connaissance des autres opérateurs, étant donné que l'ensemble des opérateurs du code CAST3M sont orthogonaux les uns aux autres. La structure informatique ainsi décrite de CAST3M nous a orientés à structurer nos programmes comme le décrivent sommairement les sections qui suivent :

CRÉATION D'UN NOUVEL OBJET DE TYPE RIGIDITÉ.

La mise en oeuvre numérique de l'ensemble des étapes et des algorithmes de la construction de la matrice de rigidité \mathbf{K}_{SE} du super-élément intégral constitue le coeur et l'apport majeur de notre travail de thèse. Tous ces algorithmes qui seront détaillés le long de ce mémoire, constituent des structures de données contenues dans un nouvel objet de type RIGIDITÉ. La frontière du domaine étant discrétisée par plusieurs éléments de frontière et comportant n noeuds géométriques, il a fallu fabriquer un nouvel objet de type MAILLAGE constitué par un élément de frontière unique et contenant les n noeuds géométriques. Ce nouveau maillage ainsi défini, représentera la géométrie du super-élément intégral.

CRÉATION DU NOUVEL OPÉRATEUR EIVAR.

L'opérateur EIVAR ainsi créé doit acquérir les données du nouvel objet de type RIGIDITÉ, à partir desquelles il évaluera la matrice de rigidité \mathbf{K}_{SE} et communiquera les résultats au monde extérieur.

BRANCHEMENT DE L'OPÉRATEUR EIVAR.

Pour que EIVAR devienne un opérateur du code CAST3M, il était nécessaire de le rajouter à la pile des opérateurs déjà existants. Il a suffi pour cela de procéder à un branchement dans le sous-programme PILOT du présent code. Une fois la matrice de rigidité \mathbf{K}_{SE} du super élément intégral évaluée, elle est assemblée à celle du domaine complémentaire discrétisé par éléments finis.

LANGAGE DE PROGRAMMATION

Le code source est écrit en ESOPE. Ce dernier reste une extension du langage FORTRAN 77. Ce langage facilite la gestion des données et est orienté OBJET par la structuration des données.

Notre travail parmi les axes de recherche du L3MSGC

Depuis quelques années, le développement d'outils numériques adaptés à la modélisation des matériaux et des structures du Génie Civil a été au centre des préoccupations de notre laboratoire. Parallèlement à la méthode des éléments finis qui a été largement adoptée, les développements numériques propres à la méthode des éléments de frontière ont été motivés par la mise en avant des nombreux avantages que présente cette dernière. Les premiers travaux ont consisté dans le développement d'un code d'élasticité bidimensionnelle unizone, dans le but d'implanter un super-élément *équations intégrales* dans un code aux éléments finis [26]. L'objectif principal résidait dans l'exploitation des possibilités qu'offraient les méthodes intégrales à modéliser simplement les milieux infinis [27]. Les travaux de Laurent Ulmet [71] ont mis en avant un autre avantage des méthodes intégrales, dans le cadre de l'étude des perturbations introduites par la présence d'hétérogénéités sur le champ élastique d'un matériau. Corrélativement à ces développements, l'idée d'adapter cette méthode à l'étude des contacts s'est concrétisée par le développement d'un programme spécifique pour l'étude d'assemblages de plaques par plusieurs boulons sollicités en cisaillement [72]. Dans une troisième voie importante, qui consistait à mettre en oeuvre les méthodes intégrales pour l'étude automatique de la propagation de fissures dans des structures planes, les éléments de frontière offraient la possibilité de suivre aisément des formes géométriques évolutives lors du processus incrémental de propagation [22]. Un des points forts de la méthode et bien exploité dans ces derniers travaux cités, est l'utilisation d'un élément spécial de pointe de fissure, permettant d'obtenir directement et avec grande précision les facteurs d'intensité de contraintes.

De nos jours, les axes de recherche développés au sein de notre équipe s'orientent davantage vers la modélisation mécanique des chaussées, des structures en bois et l'étude des structures d'assemblages. Notre travail se situe bien à l'intersection de ces axes et dotera le laboratoire d'un outil de modélisation supplémentaire basé sur l'utilisation couplée des avantages des méthodes des éléments de frontière et des éléments finis.

Plan du mémoire

Le contexte et les objectifs de la thèse étant fixés, nous avons articulé ce mémoire en six chapitres, dont le premier se résume à la présente introduction générale.

Dans le deuxième chapitre, on a introduit tout d'abord, les différentes notations et définitions utilisées et nécessaires à la compréhension des différents concepts introduits le long de ce mémoire. Les bases théoriques des méthodes intégrales seront ensuite exposées tout en distinguant deux approches : l'approche par *collocations*, qui est l'approche la plus répandue dans la littérature des méthodes intégrales et l'approche intégrale *variationnelle symétrique de*

Galerkin. C'est dans le troisième chapitre que sera exposée une approche originale de couplage symétrique avec la méthode des éléments finis, développée dans le cadre de ce travail. Mais avant d'exposer l'ensemble des étapes menant à la construction de la matrice de rigidité du *super-élément* intégral avec l'approche variationnelle de Galerkin, nous avons, au tout début de ce chapitre, rappelé la méthodologie décrivant le couplage avec la méthode des éléments finis basée sur l'approche par collocations. Cette formulation de couplage non symétrique a déjà fait l'objet de nombreux travaux et ne constitue en aucun cas le point innovant de notre thèse.

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes efforcés de décrire le plus fidèlement possible et d'une manière exhaustive, l'ensemble des schémas d'intégration mis en jeu. Nous avons attaché une attention très particulière à la description d'un nouveau schéma d'intégration singulière, respectant parfaitement la symétrie des formulations intégrales. Le développement numérique d'un tel schéma constitue un des points forts de ce travail.

L'ensemble des résultats des divers tests de validation sont consignés dans le cinquième chapitre. C'est ainsi qu'on y trouve l'étude d'une cavité sphérique sous pression, dans un milieu infini avec plastification localisée du matériau au voisinage de la cavité. Cet exemple illustre et met parfaitement en valeur la procédure de couplage *éléments de frontière* - *éléments finis*.

Dans le sixième chapitre, nous avons cherché à étendre les formulations existantes à l'étude d'un solide fissuré. Nous avons restreint notre étude à celle d'un domaine présentant une fissure interne non débouchante en supposant que les lèvres de la fissure sont libres.

L'extension des formulations intégrales variationnelles de Galerkin à l'étude d'un domaine représenté par un demi-espace présentant une région pouvant contenir des non linéarités est présentée dans le septième chapitre. Cette étude doit permettre de mettre en avant la supériorité des méthodes intégrales à traiter les milieux infinis et semi-infinis.

Le huitième chapitre contient la conclusion générale de ce mémoire.

Après avoir introduit la bibliographie générale, l'ensemble des annexes qui contribuent à la clarification de certains concepts introduits le long de ce mémoire sont renvoyées à la fin de ce document. La description de certains aspects de notre programme est donnée en annexe C.

Chapitre II

Méthodes des équations intégrales

II.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous avons pour objectif de dégager quelques traits caractéristiques de la méthode des équations intégrales appliquée à la résolution des problèmes de la mécanique des solides. Dans cette partie de nature bibliographique, nous exposons dans un premier point et en toute généralité, le principe qui régit l'obtention d'une *équation intégrale de frontière* pour un problème aux limites. On présentera ensuite et d'une manière plus détaillée les différentes étapes menant à la construction d'une équation intégrale pour un problème élastostatique. On a noté par ailleurs la difficulté qui caractérise l'implantation numérique de l'équation intégrale en traction indispensable pour l'étude des problèmes de la mécanique de la rupture. Nous verrons que l'approche par *collocations* utilise d'une manière directe ce formalisme, étant donné que celui-ci s'y prête naturellement. Nous exposons dans une seconde partie les bases théoriques formulant les équations intégrales variationnelles. Cette méthode sera retenue pour construire une approche de couplage que l'on exposera un peu plus loin dans ce mémoire. Mais avant d'aborder tous ces points d'une manière détaillée, proposons nous d'abord de préciser les notations, ainsi que quelques définitions utilisées dans le cadre de ce travail.

II.2 Définitions et notations

Certaines conventions et notations que nous définissons dans cette partie sont constamment appelées dans ce mémoire.

GRANDEURS SCALAIRES, VECTORIELLES ET TENSORIELLES.

Les caractères maigres désignent des quantités scalaires et les caractères gras, représentent des grandeurs vectorielles ou tensorielles. La convention de sommation d'Einstein sur des indices latins $i, j, k, l \dots$ variant de 1 à 3, est employée sauf mention explicite du contraire.

GÉOMÉTRIE.

Les points de l'espace euclidien tridimensionnel \mathbb{R}^3 , rapporté à un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R} = (\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sont notés comme $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{z} = z_i \mathbf{e}_i$. Le vecteur de la normale unitaire à une surface d'un domaine est désigné par \mathbf{n} et est toujours pris extérieur au domaine (sauf mention contraire).

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS.

Certaines notations sont adoptées pour désigner les dérivations partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_{,x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{,xy} \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} \equiv f_{,i}$$

$$f_{,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{\partial}{\partial y_j} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad f_{,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

CONTINUITÉ AU SENS D'HÖLDER.

Soit un domaine Ω de frontière régulière $\partial\Omega$. La continuité au sens d'Hölder traduit l'hypothèse d'une régularité de type $C^{m,\alpha}$ d'un champ f en un point \mathbf{x} de la frontière $\partial\Omega$. Le champ f est $C^{m,\alpha}$ en \mathbf{x} s'il vérifie :

$$\exists(\alpha, C) > 0, \quad |u_{i,m}(\mathbf{x}) - u_{i,m}(\mathbf{y})| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha \quad (\text{II.1})$$

\mathbf{y} étant un point se situant sur la même frontière régulière $\partial\Omega$.

II.3 Principe des méthodes intégrales

On peut d'abord, en toute généralité, souligner quel est le principe qui régit l'obtention d'une équation intégrale de frontière. En effet à chaque problème aux limites considéré d'inconnue f , nous pouvons associer un système d'équations locales et des conditions aux limites, de sorte que l'on puisse écrire les équations suivantes, pour un domaine borné Ω de frontière $\partial\Omega$ sur laquelle nous avons prescrit des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}f + b = 0 \\ f = f_1 \quad \text{sur} \quad S_u \\ \mathcal{D}(f) = f_2 \quad \text{sur} \quad S_T \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

\mathcal{L} est un opérateur linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre associé au champ scalaire f . \mathcal{D} est un opérateur différentiel du premier ordre sur le champ scalaire f et linéaire par rapport à la normale sortante \mathbf{n} à la frontière $\partial\Omega$.

Considérons alors un deuxième champ scalaire arbitraire g , et appliquons l'*identité de réciprocité* suivante :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}f \cdot g - \mathcal{L}g \cdot f) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathcal{D}f \cdot g - \mathcal{D}g \cdot f) dS \quad (\text{II.3})$$

La méthode des équations intégrales prend :

- ◇ Pour g un champ connu sous forme d'une *solution élémentaire* qui satisfait l'équation locale (II.2)₁ mais pas les conditions aux limites (II.2)₂ et (II.2)₃
- ◇ Pour f le champ inconnu qui constitue la solution du problème et qui doit satisfaire quant à lui l'équation locale (II.2)₁ et les conditions aux limites (II.2)₂ et (II.2)₃

Ce principe réalise une *quasi-inversion* de l'équation locale (II.2)₁ étant donné que le calcul du champ inconnu f dans le volume de Ω est ramené à celui des valeurs du couple $(f, \mathcal{D}f)$ sur la frontière $\partial\Omega$. Ces valeurs sont restées inconnues après prise en compte des conditions aux limites (II.2)₂ et (II.2)₃. Le problème qui était initialement défini sur le volume de Ω se trouve ainsi transformé en un problème défini sur la frontière de Ω .

Dans ce qui va suivre nous allons définir ce qu'on a appelé précédemment *solution élémentaire* et essayer de montrer comment par application de ce principe on parvient à obtenir une équation intégrale qui régit un problème aux limites élastostatique.

II.4 Equations intégrales de frontière pour l'élastostatique linéaire

Nous considérons un solide tridimensionnel Ω , linéairement élastique, homogène. La frontière $\partial\Omega$ de Ω , de normale unitaire extérieure \mathbf{n} , est supposée bornée, régulière par morceaux.

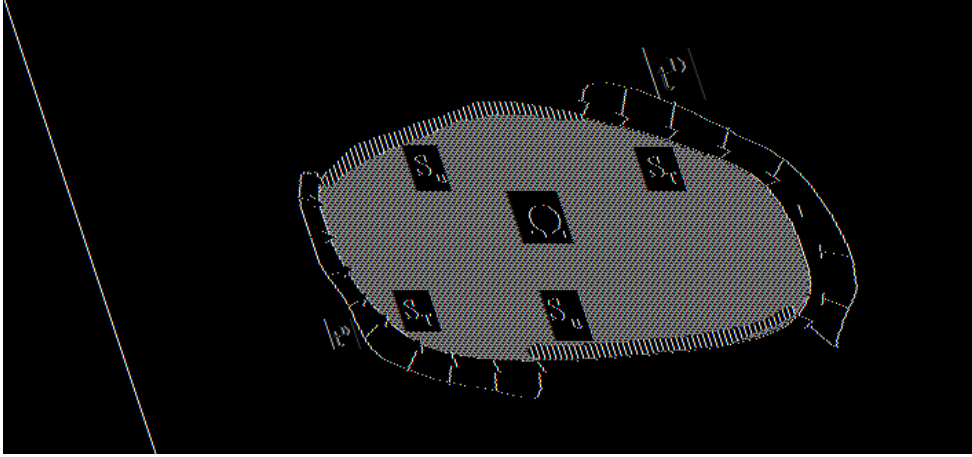
Les champs de déplacements, de déformations et de contraintes en un point \mathbf{y} de Ω sont notés respectivement $\mathbf{u}(\mathbf{y})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ et $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ désigne une distribution d'efforts volumiques. Les équations de l'équilibre élastique de Ω exprimées en composantes cartésiennnes orthonormées, sont :

- ◇ **Equation d'équilibre**

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{II.4})$$

- ◇ **Equation de compatibilité**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.5})$$

Figure II.1 : Solide élastique Ω .

◇ **Equation de comportement**

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.6})$$

Les composantes du tenseur de Hooke C vérifient les symétries bien connues :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (\text{II.7})$$

Après avoir défini l'équation locale (II.4) du problème élastostatique, définissons alors les conditions aux limites qui l'accompagnent de la manière suivante:

$$\begin{cases} T^n(\mathbf{u}) \equiv (\sigma \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{t}^D & \text{sur } S_T \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^D & \text{sur } S_u \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

IDENTITÉ DE RÉCIPROCITÉ DE MAXWELL-BETTI.

L'identité de réciprocité de *Maxwell-Betti* dérive du théorème des travaux virtuels [62]. Elle relie deux états élastostatiques définis par un champ en déplacement \mathbf{u} , en tensions \mathbf{t} et une force volumique \mathbf{b} . Soient $(\mathbf{u}^1, \mathbf{t}^1, \mathbf{b}^1)$ et $(\mathbf{u}^2, \mathbf{t}^2, \mathbf{b}^2)$ les deux états élastostatiques considérés et pris distincts sur Ω , nous écrivons l'identité de Maxwell-Betti comme suit :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{u}^1 - \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{u}^2) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 - \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1) dS \quad (\text{II.9})$$

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES.

On appelle solution élémentaire de l'élastostatique un état élastostatique $(\mathbf{U}^k, \boldsymbol{\Sigma}^k, \mathbf{F}^k)$ défini sur un domaine auxiliaire $E \in \mathbb{R}^3$, vérifiant donc le système donné par les équations (II.4), (II.5) et (II.6) et associé à une force ponctuelle exercée au point fixé $\mathbf{x} \in E$ et de direction \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{b}_k = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{e}_k \quad \mathbf{y} \in E \quad (\text{II.10})$$

Le vecteur déplacement $\mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et le tenseur des contraintes élastiques associé $\boldsymbol{\Sigma}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dépendent du point courant \mathbf{y} , du point d'application \mathbf{x} de la force ponctuelle ainsi que de la direction k de celle-ci. Leurs composantes cartésiennes respectives $U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vérifient les équations d'équilibre (II.4) et de comportement (II.6) :

$$\Sigma_{ij,j}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})\delta_{ij} = \mathbf{0} \quad \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijab}U_{a,b}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{II.11})$$

Toute solution élémentaire de l'élasticité linéaire pour tout domaine $\Omega \subseteq E$ et pour tout point fixé $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ vérifie l'identité suivante appelée *mesure de Dirac* :

$$\kappa\delta_{ij} + \int_{\partial\Omega} n_j(\mathbf{y})\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \kappa = 1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \kappa = 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Cette dernière égalité traduit l'équilibre du domaine Ω sous l'action de la force ponctuelle unitaire exercée en \mathbf{x} et des tensions agissant sur la frontière $\partial\Omega$.

SOLUTION DE KELVIN.

La solution de Kelvin est la solution élémentaire la plus simple des équations de l'élasticité et correspond au déplacement en un point \mathbf{y} de l'espace infini élastique $E = \mathbb{R}^3$ isotrope sous l'effet d'une force ponctuelle unitaire (II.10) appliquée en un point \mathbf{x} . Les composantes du déplacement et des contraintes de Kelvin sont données par :

$$U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [r_{,i}r_{,k} + (3-4\nu)\delta_{ik}] \quad (\text{II.13})$$

$$\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [3r_{,i}r_{,k}r_{,j} + (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k})] \quad (\text{II.14})$$

où $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ désigne la distance euclidienne entre le point d'observation (ou point *courant*) \mathbf{y} et le point d'application de la force (ou point *source*) \mathbf{x} et nous posons que l'expression de la dérivée partielle $r_{,\alpha}$, n'est autre que:

$$r_{,\alpha} = \frac{y_\alpha - x_\alpha}{r}$$

Le vecteur contrainte associé à la solution élémentaire au point \mathbf{y} est donné en fonction de la normale en ce point :

$$T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \quad (\text{II.15})$$

Physiquement $\mathbf{U}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ représente le champ de déplacement dans l'espace \mathbb{R}^3 induit par une force concentrée unitaire et de direction \mathbf{e}_k . Nous envisagerons exclusivement le tenseur de Kelvin dans la suite du document. D'autres solutions élémentaires, connues sous le nom de solutions de Mindlin sont introduites dans [55, 6, 16] et reportées en annexe D.

II.4.1 Représentation intégrale des champs élastiques

On appelle représentation intégrale des champs élastiques \mathbf{u} et \mathbf{t} , une formule qui donne explicitement la valeur de \mathbf{u} ou de \mathbf{t} en tout point \mathbf{x} intérieur à Ω sous la forme :

- ◇ d'une intégrale portant sur le volume du domaine Ω , et faisant intervenir la source \mathbf{b} . Cette intégrale constitue une solution particulière du problème défini par (II.4–II.6) et ne vérifie pas les conditions aux limites (II.8).
- ◇ d'une intégrale portant sur la frontière $\partial\Omega$, et faisant intervenir les valeurs de $(\mathbf{u}, T^n(\mathbf{u}))$ prescrites sur la frontière par l'intermédiaire des conditions aux limites et celles restant inconnues.

Pour parvenir à obtenir une telle représentation, il faut appliquer le principe décrit en section (II.3). Identifions alors dans l'équation (II.9), l'état fictif $(\mathbf{u}^2, \mathbf{t}^2)$ aux *solutions fondamentales* de Kelvin respectivement en déplacement et en contraintes définies dans (II.13) et (II.14), la source volumique \mathbf{b}^2 à la force ponctuelle définie en (II.10) et l'état $(\mathbf{u}^2, \mathbf{t}^2)$ au champ inconnu (\mathbf{u}, \mathbf{t}) . Appliquons ensuite l'identité de Maxwell-Betti introduite en (II.9) de sorte à formuler l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) u_i(\mathbf{y}) dV_y &= \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u_i(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} dS_y \\ &\quad + \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{II.16}) \end{aligned}$$

Par définition de la mesure de Dirac, nous déduisons que :

$$\int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) u_i(\mathbf{y}) dV_y = \kappa u_k(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \kappa = 1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \kappa = 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU DÉPLACEMENT.

En prenant en compte simultanément les deux formules précédentes, nous arrivons à l'expression de la représentation intégrale du champ de déplacement en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$ non situé sur la frontière $\partial\Omega$:

$$\kappa u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u_i(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} dS_y + \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{II.18})$$

FORMULE DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU TENSEUR DES CONTRAINTES.

L'obtention d'une formule explicite de toute représentation du tenseur des contraintes repose sur la dérivation sous le signe intégral de l'équation donnée par (II.18) par rapport à \mathbf{x} :

$$\kappa u_{k,l}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_a(\mathbf{y}) U_{a,\bar{\ell}}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u_a(\mathbf{y}) T_{a,\bar{\ell}}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} dS_y + \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_{a,\bar{\ell}}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{II.19})$$

avec :

$$T_{a,\bar{\ell}}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n_b(\mathbf{y}) \Sigma_{ab,\bar{\ell}}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

et par l'application ensuite de la loi élastique de Hooke, en prenant le soin de considérer les propriétés (voir page 67 de [16]) de symétrie suivantes :

$$C_{ijkl} U_{a,\bar{\ell}}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad C_{ijkl} \Sigma_{ab,\bar{\ell}}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{abkl} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (\text{II.20})$$

$$\begin{aligned} \kappa \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_a(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - u_a(\mathbf{y}) n_b(\mathbf{y}) C_{abkl} \Sigma_{ij,l}^k \right\} dS_y \\ + \int_{\Omega} b_a(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dV_y \quad (\text{II.21}) \end{aligned}$$

$\kappa = 1$ pour une représentation intérieure ($\mathbf{x} \in \Omega$) et $\kappa = 0$ pour une représentation extérieure ($\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ avec $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$). Il est clairement démontré dans [16] que la même formule de représentation intégrale est applicable aux domaines bornés ou non. Dans ce dernier cas, la normale qui doit rester toujours extérieure au domaine, change de sens.

Rappelons que les représentations intégrales des champs de déplacements et de contraintes ne sont valables que pour des points \mathbf{x} non situés sur la frontière $\partial\Omega$. Nous allons maintenant montrer ce qui justifie cette restriction et comment, arriver à de nouvelles formes de représentations intégrales des champs \mathbf{u} et \mathbf{t} valables pour des points $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ moyennant le recours à un processus de régularisation adéquat. Ce procédé de régularisation a été exposé dans [16]. et nous reprendrons les grandes lignes décrivant ce dernier dans la section qui suit.

En effet, les représentations intégrales des champs de déplacements et de contraintes exhibent des noyaux singuliers pour des points \mathbf{x} se situant sur la frontière étant donné que la distance r séparant le point courant \mathbf{y} et le point source \mathbf{x} tend vers zéro.

II.4.2 Equation intégrale régularisée en déplacement

La détermination d'une *équation intégrale de frontière* en déplacement reliant uniquement les champs élastiques sur la frontière nécessite la détermination des limites de (II.18) quand le point \mathbf{x} tend vers le point \mathbf{y} de la frontière. L'obtention de ces limites n'est pas immédiate et un traitement pointilleux de *régularisation* s'impose.

RÉGULARISATION DE PREMIER ORDRE

Ce processus de régularisation se base sur un passage à la limite en indentant le domaine Ω de la singularité et sur la connaissance d'une solution particulière, à savoir l'*identité de corps rigide* vérifiée par les solutions élémentaires.

Identité de corps rigide

Considérons un solide borné Ω qui subit une translation rigide \mathbf{u}^0 avec forces de volume nulles. Cet état élastostatique ainsi défini vérifie les équations de l'équilibre élastique définies en (II.4), (II.5) et (II.6). La formule de représentation intégrale (II.18) lui est ainsi appliquée de façon à formuler l'écriture de l'*identité de corps rigide* suivante :

$$\kappa \mathbf{u}_k^0 + \mathbf{u}_i^0 \int_{\partial\Omega} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = 0 \quad (\text{II.22})$$

Nous pouvons aussi écrire la précédente relation pour une valeur particulière $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, nous écrivons :

$$\kappa \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \int_{\partial\Omega} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = 0 \quad (\text{II.23})$$

Retranchons l'identité écrite ci dessus à la formule de représentation intégrale (II.18):

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y = \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{II.24})$$

A ce stade de démonstration, cette relation reste valable pour tout point source \mathbf{x} non situé sur la frontière du domaine.

PASSAGE À LA LIMITE.

Pour ce faire, \mathbf{x} fixé étant choisi sur la frontière, l'approche classique consiste à introduire, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, un *voisinage d'exclusion* sphérique $B_\varepsilon(\mathbf{x})$, boule de centre \mathbf{x} et de rayon ε et on pose $\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon(\mathbf{x})$, $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$, $e_\varepsilon = \partial\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$. Par construction, $\mathbf{x} \notin \partial\Omega_\varepsilon$, on étudie donc la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ de l'équation (II.24) écrite pour

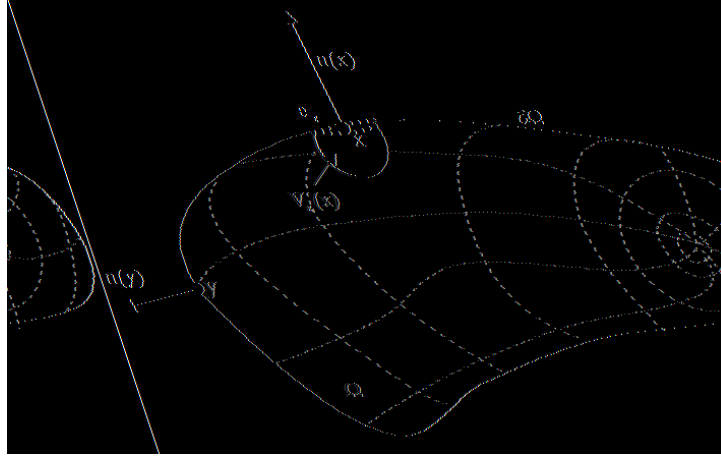


Figure II.2 : Indentation du domaine Ω lors du passage à la limite.

le domaine Ω_ε de frontière $(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$. Lors du passage à la limite détaillé en annexe B, on peut démontrer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})]\} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} dS_y = 0 \quad (\text{II.25})$$

et que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})]\} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} dS_y \\ = \int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})]\} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} dS_y \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

et finalement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y = \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{II.27})$$

ce qui nous conduit à écrire l'équation intégrale de frontière régularisée en déplacement comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})]\} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} dS_y = \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{II.28})$$

Cette dernière égalité relie les valeurs des variables en déplacements \mathbf{u} et en tensions \mathbf{t} uniquement sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine et fait intervenir des intégrales convergentes et présentant des singularités intégrables en $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ et il est clairement démontré lors de ce processus de régularisation que les déplacements \mathbf{u} doivent être de continuité $C^{0,\alpha}$ (*continuité au sens d'Hölder*), ce qui ne pose aucune difficulté de mise en oeuvre numérique de cette équation intégrale régularisée en déplacements.

II.4.3 Equation intégrale de frontière en traction

Nous rappelons que l'expression de la représentation intégrale du vecteur des contraintes obtenue en (II.21) n'est valable que pour un point $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$. Quand le point d'observation \mathbf{x} se situe sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine, nous ne pouvons pas obtenir directement l'équation intégrale de frontière du gradient des déplacements et par la suite celle des contraintes, en raison de la présence des dérivées du tenseur $\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ singulières comme $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-3}$. Un passage à la limite s'impose et un procédé de régularisation approprié et plus complexe que le précédent doit l'accompagner. Différentes approches de régularisation ont été proposées pour traiter les intégrales hypersingulières [46, 69]. Une méthode exposée dans [16, 18] d'évaluation du gradient des déplacements et du tenseur des contraintes qui repose fondamentalement sur un procédé de dérivation tangentielle des déplacements \mathbf{u} et des tensions \mathbf{t} , permet seulement l'évaluation des contraintes tangentielles sur la frontière. Les travaux de [38] mettent en cause cette technique vu la mauvaise précision qui caractérise ses résultats numériques. Des représentations intégrales sur la frontière du gradient des déplacements et par conséquent celles des contraintes sont obtenues grâce à l'utilisation de l'approche de régularisation du *second ordre* exposée dans [16, 18]. Un des points contraignants qui caractérise la mise en oeuvre numérique d'une équation intégrale en contrainte se résume à la nécessité absolue que les déplacements \mathbf{u} soient de régularité $C^{1,\alpha}$ en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. La méthode dite des *collocations* se base essentiellement sur la discrétisation de cette représentation pour l'évaluation complète du tenseur des contraintes ou de celui du gradient des déplacements sur la frontière. Il sera démontré par la suite que les méthodes intégrales variationnelles symétriques ne butent pas sur cette limitation et que la représentation intégrale variationnelle en contraintes ou en gradient des déplacements se suffit d'une hypothèse de régularité de $C^{0,\alpha}$ sur les déplacements \mathbf{u} d'où la facilité dans la mise en oeuvre numérique. Le besoin d'évaluer et de disposer d'équations intégrales en contraintes s'avère important dans la résolution de certains problèmes et plus spécialement en mécanique de la rupture. Ce point constitue une de nos motivations à explorer les méthodes intégrales variationnelles symétriques de Galerkin et à les placer au premier rang lors de nos développements numériques.

II.5 Formulations intégrales variationnelles

II.5.1 Principe

Dans cette section, nous nous efforcerons d'expliquer, même sommairement ce que l'on entend par principe variationnel et comment il peut servir à l'obtention d'équations intégrales variationnelles ? Un principe variationnel fait intervenir une quantité scalaire, appelée *fonctionnelle* s'écrivant sous forme d'une intégrale où seront présentes toutes les relations définissant le

problème aux limites considéré et tel qu'il est décrit dans par (II.4) et (II.8) (équation locales et conditions aux limites). La solution du problème décrit par (II.4) et (II.8) rend stationnaire la fonctionnelle ainsi définie, ce qui signifie que la première *variation* de celle-ci (correspondant à une petite perturbation de la solution du problème) s'annule. Un des principes variationnels utilisés en mécanique est connu sous le nom de *principe du minimum de l'énergie potentielle* largement utilisé dans la méthode des éléments finis. Le fait que des matrices symétriques apparaissent toutes les fois qu'intervient un principe variationnel est une propriété des plus remarquables et qui sera exploitée dans les travaux qui traitent de l'obtention des formulations intégrales variationnelles. D'autre part, nous avons vu dans la section (II.4), qu'à partir du problème aux limites élastostatique décrit par les relations (II.4–II.6) et (II.8), il était possible de donner une représentation intégrale à toute solution en déplacements \mathbf{u} ou en tensions \mathbf{t} . L'écriture des champs tests en déplacements $\delta\mathbf{u}$ obtenus à partir de la représentation intégrale du champ de déplacement (II.18) et leur incorporation dans les formes variationnelles associées à la condition de stationnarité de la fonctionnelle donne lieu à ce qu'on appelle les *équations intégrales variationnelles*. Nous allons voir que la forme minimisée de la fonctionnelle de l'énergie potentielle est utilisée sous sa forme *faible*, ce qui signifie que l'on a procédé à une intégration par parties pour diminuer les conditions de dérivabilité des champs de déplacements.

Les premiers travaux en formulations intégrales variationnelles traitent de la théorie du potentiel scalaire et sont donnés dans [57, 58]. Parallèlement à ces études menées dans un cadre mathématique, des formulations intégrales variationnelles plus mécaniques utilisant la notion de représentation intégrale du champ de déplacement ont été proposées d'une manière plus exhaustive en élasticité linéaire dans [20]. Enfin nous renvoyons le lecteur à ce même article très complet qui résume un bon nombre de développements théoriques. Les premiers résultats pour une implémentation tridimensionnelle du problème élastique ont été exhibés dans [17, 2, 75]. Des travaux très récents et des développements numériques se rattachant à ces méthodes en élastoplasticité sont exposés dans [25].

II.5.2 Fonctionnelle de l'énergie potentielle

On peut définir un modèle général, où toutes les relations du problème défini en (II.4–II.6) et (II.8) sont représentées sous une forme variationnelle, et où le principe du minimum de l'énergie potentielle totale peut être utilisé d'une manière analogue à la méthode des éléments finis.

La solution \mathbf{u} en déplacement du problème continu élastique défini par (II.4), (II.5) et (II.6) rend stationnaire la fonctionnelle de l'énergie potentielle $\Pi(\mathbf{v})$ suivante :

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dV - \int_{S_T} \mathbf{t}^D \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{S_u} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^D) \, dS \quad (\text{II.29})$$

ce qui signifie que sa première variation correspondant à des petits changements $\delta \mathbf{u}$ doit être nulle. Si on pose $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$, la condition de stationnarité se traduit par :

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, dV - \int_{S_T} \mathbf{t}^D \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{S_u} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = 0 \quad (\text{II.30})$$

L'inconnue \mathbf{u} est supposée harmonique, nous pouvons écrire que $\Delta \delta \mathbf{u} = 0$.

II.5.3 Fonctionnelle de l'énergie potentielle sous sa forme faible

Une intégration par parties permet de transformer une forme intégrale de type (II.30) de manière à diminuer les conditions imposées aux fonctions admissibles \mathbf{u} , l'ordre de dérivabilité de celle-ci étant devenu plus faible. Après une intégration par parties du terme portant sur le volume présent dans (II.30), celle-ci sera réduite à une intégrale surfacique ne portant que sur la trace du champ de déplacement \mathbf{u} sur la frontière. Nous écrivons alors que :

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_{S_u} \mathbf{u}^D \cdot \mathbf{T}^n(\delta \mathbf{u}) \, dS + \int_{S_T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^n(\delta \mathbf{u}) \, dS - \int_{S_T} \mathbf{t}^D \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{S_u} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = 0 \quad (\text{II.31})$$

Il faut remarquer que contrairement à la forme présentée dans (II.30), cette écriture fait apparaître des opérateurs différentiels sur le champ des fonctions test $\delta \mathbf{u}$, ce qui nécessite d'imposer des conditions de dérivabilité plus fortes sur le champ $\delta \mathbf{u}$. La forme obtenue en (II.31) constitue le point de départ pour la construction d'une formulation intégrale variationnelle.

CHOIX DES FONCTIONS TEST.

Il nous reste à définir les formes adéquates à donner aux fonctions $\delta \mathbf{u}$ et en $\mathbf{T}^n(\delta \mathbf{u})$ qui interviennent dans (II.31). Tout $\delta \mathbf{u}$ solution du problème élastique considéré, admet une représentation intégrale de la forme de (II.18) sous l'hypothèse simplificatrice que les forces de volume soient nulles. Nous considérons simultanément le domaine borné Ω et son complémentaire $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$. Introduisons les sauts des déplacements $\tilde{\mathbf{u}}$ et des tensions $\tilde{\mathbf{t}}$ à travers la frontière $\partial\Omega$.

Nous écrivons alors les représentations intégrales de la fonction $\delta \mathbf{u}$ respectivement pour un problème intérieur ($\kappa = 1$) et un problème extérieur ($\kappa = 0$).

$$\delta u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \delta t_i^-(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta u_i^-(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} \, dS_y \quad (\text{II.32})$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left\{ \delta t_i^+(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta u_i^+(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} \, dS_y \quad (\text{II.33})$$

Si nous réécrivons la représentation intégrale du champ $\delta \mathbf{u}$ cette fois-ci en fonction des sauts de déplacements $\tilde{\mathbf{u}}$ et de tractions $\tilde{\mathbf{t}}$ à travers la frontière $\partial\Omega$ tels que $\tilde{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u}^+ - \delta \mathbf{u}^-$ et $\tilde{\mathbf{t}} = \delta \mathbf{t}^+ - \delta \mathbf{t}^-$ nous posons:

$$\delta u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \tilde{u}_i(\mathbf{y}) T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \tilde{t}_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} dS_y \quad (\text{II.34})$$

Compte tenu des conditions aux limites (II.8) du problème initial, considéré nous pouvons restreindre la formule précédente en imposant $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ sur S_u et $\tilde{\mathbf{t}} = 0$ sur S_T .

$$\delta u_k(\mathbf{x}) = \int_{S_T} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y - \int_{S_u} \tilde{t}_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \quad (\text{II.35})$$

De même que précédemment et d'après (II.21), la représentation intégrale du tenseur des contraintes $\delta \sigma = \sigma(\delta \mathbf{u})$ sera donnée par l'expression suivante :

$$\delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{klab} \int_{S_T} \tilde{u}_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y - \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y \quad (\text{II.36})$$

II.5.4 Construction de la formulation variationnelle intégrale

L'idée fondamentale pour l'obtention d'une formulation intégrale symétrique repose sur la substitution des expressions (II.35) et (II.36) dans la condition de stationnarité (II.31). Les intégrales de surface engendrées sont doubles et présentent des noyaux singuliers en \mathbf{r}^{-1} , \mathbf{r}^{-2} et \mathbf{r}^{-3} . Il est évident que ces formulations qui mettent en jeu des intégrales fortement singulières ou hypersingulières ne peuvent pas être directement implantées. Un moyen pour contourner la difficulté d'évaluation de ces intégrales consiste à appliquer une technique de régularisation reposant sur une double intégration par parties, initialement introduite par [58]. Cette technique a été étendue à un problème d'élasticité tridimensionnelle avec conditions aux limites mixtes dans [16, 17, 18]. Ce procédé de régularisation consiste à introduire une surface auxiliaire $\tilde{S}(\eta)$ extérieure et bien distincte de Ω et construite à partir de $\partial\Omega$ supposée régulière en introduisant le paramètre η de sorte que :

$$\forall \mathbf{y} \in \partial\Omega \rightarrow \mathbf{z} \in \tilde{S}(\eta) \equiv \mathbf{y} + \eta \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{II.37})$$

Ce processus de régularisation a été utilisé en 2D dans [65] et en élasto-plasticité 2D dans [51]. Ainsi, la représentation intégrale n'est plus écrite sur $\partial\Omega$ mais sur $\tilde{S}(\eta)$, ce qui permet d'effectuer les opérations classiques sur les intégrales. On procède par la suite à un passage à la limite qui consiste à faire tendre *uniformément* la surface auxiliaire $\tilde{S}(\eta)$ vers $\partial\Omega$, ce qui revient ainsi à faire tendre η vers zéro. Dans [16, 17, 18], la technique de régularisation qui se base sur le passage à la limite $\tilde{S}(\eta)$ vers $\partial\Omega$ est considérée avant toute discrétisation grâce à l'utilisation de la propriété dont dispose le noyau hypersingulier $C_{klab} (\partial / \partial y_b) \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ à être reformulé en

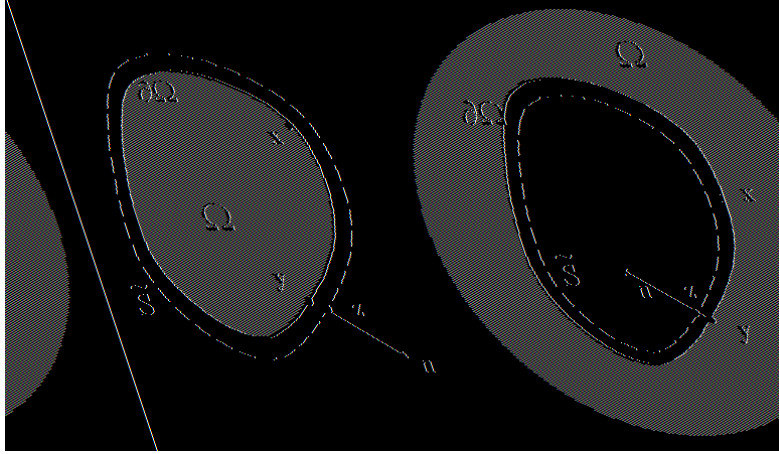


Figure II.3 : Définition d'une surface auxiliaire pour un domaine borné (a), pour un domaine non borné (b).

fonction d'un double *rotationnel surfacique*. Cette dernière notion a été introduite initialement dans [58]. La reformulation des expressions (II.35) et (II.36) cette fois ci sur la surface auxiliaire $\tilde{S}(\boldsymbol{\eta})$ donne lieu aux équations régulières suivantes :

$$\delta u_k(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \quad (\text{II.38})$$

$$\delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{klab} \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y \quad (\text{II.39})$$

que l'on injecte dans la condition de stationnarité (II.31). Ceci permet de reformuler le problème en deux partitions distinctes, une collectant les termes en déplacements $\tilde{\mathbf{u}}$ et l'autre les termes en tensions $\tilde{\mathbf{t}}$, ce qui donne lieu à l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \forall & \tilde{\mathbf{u}} & \delta P^T(\tilde{\mathbf{u}}) = E_1 + E_2 = 0 \\ \forall & \tilde{\mathbf{t}} & \delta P^U(\tilde{\mathbf{t}}) = F_1 + F_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

INTÉGRALES FAIBLEMENT SINGULIÈRES.

Ecrivons l'expression explicite de E_1 donné par l'équation (II.40), comme suit :

$$E_1 = \int_{S_T} u_k(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z dS_x + \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z dS_x \quad (\text{II.41})$$

Les intégrales présentes dans l'expression de E_1 exhibent des noyaux contenant $U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ singuliers comme $O(r^{-1})$. Chacune des intégrales extérieure et intérieure qui forme E_1 , est définie respectivement régulière et faiblement singulière et ne nécessite donc aucun processus de régularisation. Nous écrivons alors l'expression limite de E_1 en remplaçant $(\tilde{S}_u, \mathbf{z})$ par $(\partial\Omega, \mathbf{y})$ ce qui nous permet d'écrire que:

$$E_1 = \int_{S_T} u_k(\mathbf{x}) \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x + \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{II.42})$$

L'évaluation numérique de ce type d'intégrales n'est autre qu'une application directe de la double quadrature de Gauss [8] et fera l'objet d'une étude détaillée un plus loin dans notre mémoire.

INTÉGRALES FORTEMENT SINGULIÈRES.

Considérons alors le terme E_2 , les noyaux $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ des intégrales intérieures y figurant deviennent fortement singuliers $O(r^{-2})$ lors du processus de passage à la limite $\tilde{S}(\eta)$ vers $\partial\Omega$ ($\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}$).

$$E_2 = - \int_{S_u} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x - \int_{S_T} u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \quad (\text{II.43})$$

Nous ferons appel à la technique de *régularisation de premier ordre* présentée dans la section (II.4.2), tout en intervertissant entre les intégrations sur $\partial\Omega$ et $\tilde{S}(\eta)$. Cette dernière opération adoptée reste valable étant donné que les intégrales mises en jeu ne sont pas encore singulières. Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned} E_2 = & - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \int_{S_u} [u_i^D(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{z})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_x dS_z \\ & - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \int_{S_T} [u_i(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{z})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_x dS_z \\ & - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) u_i^D(\mathbf{z}) \int_{\partial\Omega} n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_x dS_z \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Compte tenu de (II.12), nous réécrivons l'équation précédente de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_2 = & - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \int_{S_u} [u_i^D(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{z})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_x dS_z \\ & - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \int_{S_T} [u_i(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{z})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_x dS_z \\ & - \kappa \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) u_k^D(\mathbf{z}) dS_z \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Les doubles intégrales résultantes se présentent sous forme d'une intégrale extérieure régulière suivie d'une intégrale intérieure faiblement singulière. L'expression limite de E_2 est obtenue en substituant $(\tilde{S}_u, \mathbf{z})$ par (S_u, \mathbf{y}) dans (II.45). Lors de ce passage à la limite, il a été prouvé que \mathbf{u} sur la frontière $\partial\Omega$ doit être de régularité $C^{0,\alpha}$ en $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, si l'on considère la continuité au sens d'Hölder. L'écriture de E_2 sous sa forme régularisée est donnée par des double intégrales sur la même frontière $\partial\Omega$. Nous reportons alors son expression régularisée dans l'équation ci dessous :

$$\begin{aligned} E_2 = & - \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \int_{S_u} [u_i^D(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \\ & - \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \int_{S_T} [u_i(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \\ & - \kappa \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) u_k^D(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

F_1 subit un traitement de passage à la limite similaire à celui de E_2 . L'écriture régularisée de F_1 se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F_1 = & - \int_{S_T} u_k(\mathbf{x}) \int_{S_T} [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_y dS_x \\ & - \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{S_T} [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \\ & + (1 - \kappa) \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{x}) dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

INTÉGRALES HYPERSINGULIÈRES.

La présence de noyaux en $O(r^{-3})$ dans les expressions de F_2 , rend le processus de régularisation plus ardu. La technique de régularisation développée dans cette section est largement détaillée dans [16, 17, 18]. L'idée est alors de procéder à une double intégration en utilisant une variante de la formule de Stokes par rapport à \mathbf{x} et à \mathbf{z} .

$$\begin{aligned} F_2 = & \int_{S_u} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) C_{klab} \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \\ & + \int_{S_T} u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) C_{klab} \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Le noyau hypersingulier $(\partial/\partial z_b) \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ peut se décomposer en fonction d'un tenseur de quatrième ordre \mathbf{A} tel que :

$$\frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = e_{iep} e_{jfq} e_{kgr} e_{lhs} \mathbf{A}_{pqrs, \bar{e}\bar{f}gh}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad (\mathbf{z} \neq \mathbf{x}) \quad (\text{II.49})$$

e_{ijk} sont les composantes du tenseur de permutation de Ricci. Le tenseur \mathbf{A} associé à la solution fondamentale tridimensionnelle de Kelvin est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{A}_{pqrs} = \frac{\mu}{8\pi} [\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr} + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{pq} \delta_{rs}] \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \quad (\text{II.50})$$

compte tenu de (II.50) nous réécrivons l'expression de F_2 , on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{S_u} \int_{\tilde{S}_T} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) e_{iep} e_{jfq} e_{kgr} e_{lhs} \mathbf{A}_{pqrs, \bar{e}\bar{f}gh}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \\ &= \int_{S_T} \int_{\tilde{S}_T} u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) e_{iep} e_{jfq} e_{kgr} e_{lhs} \mathbf{A}_{pqrs, \bar{e}\bar{f}gh}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Nous utiliserons la variante de la formule de Stokes ci dessous :

$$\int_S \phi e_{abc} n_a \psi_{,b} dS = - \int_S \psi e_{abc} n_a \phi_{,b} dS \quad (\text{II.52})$$

respectivement sur les surfaces fermées parcourues par les points \mathbf{x} et \mathbf{y} . D'autre part nous posons :

$$B_{ikqs}(\mathbf{r}) = e_{iep} e_{kgr} \mathbf{A}_{pqrs, \bar{e}g}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.53})$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{S_u} \int_{\tilde{S}_T} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) e_{jfq} e_{lhs} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) B_{ikqs, g\bar{f}}(\mathbf{r}) dS_z dS_x \\ &\quad + \int_{S_T} \int_{\tilde{S}_T} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) e_{jfq} e_{lhs} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) B_{ikqs, g\bar{f}}(\mathbf{r}) dS_z dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{S_u} \int_{\tilde{S}_T} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) e_{jfq} B_{ikqs, \bar{f}}(R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{z}) dS_z dS_x \\ &\quad - \int_{S_T} \int_{\tilde{S}_T} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) e_{jfq} B_{ikqs, \bar{f}}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{z}) dS_z dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{S_u} \int_{\tilde{S}_T} (Ru^D)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{z}) dS_z dS_x \\ &\quad + \int_{S_T} \int_{\tilde{S}_T} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{z}) dS_z dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

Avec la notation

$$(Ru)_{iq}(\mathbf{x}) = e_{jfq} n_j u_{i,f}$$

qui désigne le *rotationnel surfacique* associé au champ \mathbf{u} . Cette notion a été introduite pour la première fois dans [58] et a fait l'objet de l'annexe A.

Avec

$$\frac{1}{\mu^2} B_{ikqs} = -4\delta_{qs} F_{,ik} + [4\delta_{ik}\delta_{qs} - 4\nu\delta_{is}\delta_{kq} - 2(1-\nu)\delta_{iq}\delta_{ks}] F_{,pp} \quad (\text{II.57})$$

$$F(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{r}{16\pi\mu(1-\nu)} \quad (\text{II.58})$$

$$F_{,pp}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \quad (\text{II.59})$$

$$F_{,ik}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} (\delta_{ik} - r_{,i}r_{,k}) \quad (\text{II.60})$$

Il faut bien remarquer que le tenseur $B_{ikqs}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{r}^{-1}$ ce qui confère à l'intégrale intérieure le caractère de faible singularité et à l'intégrale extérieure celui de régularité. Grâce à l'utilisation de la double formule de Stokes, l'ordre de singularité de l'opérateur surfacique hypersingulier a diminué. Le passage à la limite $\tilde{S} \rightarrow \partial\Omega$ s'effectue en substituant simplement $(\tilde{S}_t, \mathbf{z})$ par (S_T, \mathbf{y}) , ainsi nous écrivons :

$$\begin{aligned} F_2 = \int_{S_u} \int_{S_T} (Ru^D)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \\ + \int_{S_T} \int_{S_T} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

FORMULATION VARIATIONNELLE SYMÉTRIQUE DIRECTE.

Le terme qualificatif *directe* donné à cette formulation implique que les inconnues à la frontière sont les inconnues physiques du problème, c'est à dire les tensions et les déplacements. Les équations (II.42), (II.46), (II.47), (II.61) écrites en respectant (II.40) permettent l'écriture de la formulation variationnelle symétrique directe pour un problème aux limites mixtes, défini par ((II.4)–(II.8)). C'est ainsi que nous écrivons :

Trouver $\mathbf{u} \in \vartheta_u$ et $\mathbf{t} \in \vartheta_T$ tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathfrak{S}_u(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) + \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathfrak{S}_t(\tilde{\mathbf{t}}) \end{cases} \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \vartheta_u^0 \quad \text{et} \quad \forall \tilde{\mathbf{t}} \in \vartheta_T \quad (\text{II.62})$$

Nous définissons ϑ_u , ϑ_T et ϑ_u^0 comme suit :

$$\vartheta_u = \{ \mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u} \in C^{0,\alpha} \text{ sur } S_T \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}^D \text{ sur } \partial S_T \} \quad (\text{II.63})$$

$$\vartheta_u^0 = \{ \tilde{\mathbf{u}} \text{ tel que } \tilde{\mathbf{u}} \in C^{0,\alpha} \text{ sur } S_T \text{ et } \tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ sur } \partial S_T \} \quad (\text{II.64})$$

$$\vartheta_T = \{ \tilde{\mathbf{t}} \text{ tel que } \tilde{\mathbf{t}} \text{ continu par morceaux sur } S_T \} \quad (\text{II.65})$$

Les différentes formes bilinéaires qui interviennent dans (II.62) sont données par :

$$\mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{S_T} \int_{S_T} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{II.66})$$

$$\mathcal{B}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_u} \int_{S_T} t_k(\mathbf{x}) [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_y dS_x \quad (\text{II.67})$$

$$\mathcal{B}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = - \int_{S_T} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \int_{S_u} [u_i(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \quad (\text{II.68})$$

$$\mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) = \int_{S_u} \int_{S_u} t_k(\mathbf{x}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{II.69})$$

les formes linéaires qui constituent le second membre du système (II.62) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_u(\tilde{\mathbf{u}}) &= (\kappa - 1) \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_x \\ &\quad + \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{S_T} [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \\ &\quad - \int_{S_u} (Ru^D)_{iq}(\mathbf{x}) \int_{S_T} B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_t(\tilde{\mathbf{t}}) &= \kappa \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) u_k^D(\mathbf{y}) dS_y \\ &\quad + \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \int_{S_u} [u_i^D(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \\ &\quad - \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

La formulation (II.62) est symétrique en vertu des conditions de symétrie suivantes :

$$\forall (\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}), \forall (\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) \quad \begin{cases} \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{B}_{uu}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \\ \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathcal{B}_{tt}(\tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathcal{B}_{ut}(\tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

Ces relations de symétrie découlent directement du fait que :

$$C_{ijab} \frac{\partial}{\partial x_b} U_k^a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad C_{ijab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = C_{ijab} \frac{\partial}{\partial y_b} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (\text{II.73})$$

$$U_k^a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_a^k(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Chacune des équations relatives à $\tilde{\mathbf{u}}$ et à $\tilde{\mathbf{t}}$ représente respectivement les équations intégrales en déplacement et en vecteur-tension sur S_u et S_T , écrites sous forme faible. La formulation telle

qu'elle est présentée en (II.62) présente l'avantage de n'exhiber que des quantités intégrables, ce qui s'avère d'une grande importance lors de la mise en oeuvre numérique. Notons que le fait d'avoir eu recours au choix des fonctions test sous la forme de $\delta \mathbf{u}$ suffisamment régulières dans l'écriture de l'équation intégrale en vecteur-contrainte nous a conduit à imposer une condition de continuité $C^{0,\alpha}$ pour le vecteur déplacement \mathbf{u} moins restrictive que celle imposée en méthode des collocations $C^{1,\alpha}$. Cette caractéristique fait occuper aux méthodes des équations intégrales variationnelles le premier plan pour le traitement des problèmes 3D faisant intervenir des éléments curvilignes. Ces formulations sont établies dans un cadre généraliste, c'est à dire que le domaine d'étude peut être borné ou non, dans ce cas il faut donner au coefficient κ la valeur de 1 ou de 0.

Ces formulations, telles qu'elles sont présentées dans les équations (II.62)–(II.71), traitent des problèmes aux limites mixtes. La frontière $\partial\Omega$ est répartie en une partie S_u où les déplacements \mathbf{u}^D sont prescrits et une partie complémentaire S_T où les tensions \mathbf{t}^D sont imposées. Dans les sections qui suivent, nous nous proposons de formuler la même approche pour les problèmes aux limites de type *Dirichlet* où seuls les déplacements sont imposés sur toute la frontière $\partial\Omega$ et de type *Neumann* dans le cas où seules les tensions sollicitent $\partial\Omega$.

II.5.5 Problème de Dirichlet

La frontière $\partial\Omega$ étant restreinte à S_u , la réécriture de la formulation (II.62 - II.71) en posant le support géométrique $S_T = \emptyset$ donne :

$$\text{Trouver } \mathbf{t} \in \vartheta_T \quad \bar{\mathcal{B}}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) = \bar{\mathcal{B}}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) + D_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \quad (\text{II.74})$$

avec

$$\bar{\mathcal{B}}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} t_k(\mathbf{x}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_y \, dS_x \quad (\text{II.75})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = \int_{\partial\Omega} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \int_{\partial\Omega} [u_i^D(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, dS_x \, dS_y \quad (\text{II.76})$$

$$D_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = \kappa \int_{\partial\Omega} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) u_k^D(\mathbf{y}) \, dS_y \quad (\text{II.77})$$

II.5.6 Problème de Neumann

Dans un problème aux limites de type Neumann la frontière $\partial\Omega \equiv S_T$. La réécriture de la formulation (II.62 - II.71) en posant le support géométrique $S_u = \emptyset$ se traduit par :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in \vartheta_u \quad \bar{\mathcal{B}}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \bar{\mathcal{B}}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) + D_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad (\text{II.78})$$

avec

$$\bar{\mathcal{B}}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{r}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{II.79})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\partial\Omega} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{\partial\Omega} [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{II.80})$$

$$D_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) = (\kappa - 1) \int_{\partial\Omega} t_k^D(\mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_x \quad (\text{II.81})$$

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux différentes étapes qui mènent à la construction d'une équation intégrale de frontière régularisée en déplacement et en traction. Nous avons identifié par la suite les difficultés et les limitations liées à la mise en oeuvre numérique de l'équation intégrale en traction lors de l'utilisation de l'approche par collocations. Nous avons exploré dans un second temps les principales étapes menant à la construction d'une formulation intégrale variationnelle symétrique. Dans le chapitre suivant nous utiliserons la formulation variationnelle, ainsi construite, pour la mise au point d'une procédure de couplage symétrique entre la méthode des éléments de frontière et celle des éléments finis. Une adéquate combinaison entre les problèmes de Dirichlet et de Neumann décrits précédemment nous permettra d'écrire l'énergie de déformation du domaine uniquement en fonction de la variable des déplacements \mathbf{u} . La notion d'*énergie de frontière* a été utilisée par la suite pour construire cette approche de couplage qui conduit à la construction de la matrice de rigidité d'un super-élément décrit par les équations intégrales. Nous verrons par la suite que cette même matrice de rigidité présente l'avantage d'être symétrique et est définie semi-positive et préserve ainsi toutes les propriétés d'une matrice de rigidité utilisable dans les environnements numériques d'un code éléments finis standard.

Chapitre III

Couplage éléments de frontière - éléments finis

III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit brièvement les formulations théoriques des méthodes intégrales de frontière. Il nous a permis, entre autre, d'identifier deux approches distinctes : l'approche par *collocations* et l'approche *variationnelle symétrique de Galerkin*. La première présente certes l'avantage de n'exhiber que des intégrales simples, mais conduit malheureusement à des matrices non symétriques. Cette indésirable perte de symétrie s'accompagne d'une perte de la définition du signe des différentes matrices. Contrairement à cette approche, les méthodes intégrales variationnelles symétriques de Galerkin, malgré la présence des doubles intégrales et la lourdeur qui peut caractériser sa phase d'intégration, permettent d'aboutir à des matrices symétriques. Cette particularité peut compenser l'inconvénient précédemment cité et rendre ces méthodes compétitives pour des structures à large nombre de degrés de liberté [5]. Chacune de ces deux approches peut être couplée avec la méthode des éléments finis. Des procédures de couplage des méthodes intégrales par approche par *collocations* ont fait l'objet d'un bon nombre de travaux parmi lesquels nous citerons [80, 23, 10, 9]. Nombreuses sont les techniques proposées, mais toutes peuvent être regroupées en deux grandes classes :

- ◇ une première qualifiée d'*approche par éléments finis* dans laquelle la région discrétisée par équations intégrales de frontière est traitée comme un élément fini dont la matrice de rigidité sera construite et assemblée à celle du domaine complémentaire discrétisé par éléments finis.
- ◇ une seconde qualifiée d'*approche par éléments de frontière* dans laquelle la région discrétisée par éléments finis est traitée comme un élément de frontière dont la matrice de rigidité sera construite et assemblée à celle du domaine complémentaire discrétisé par éléments de frontière.

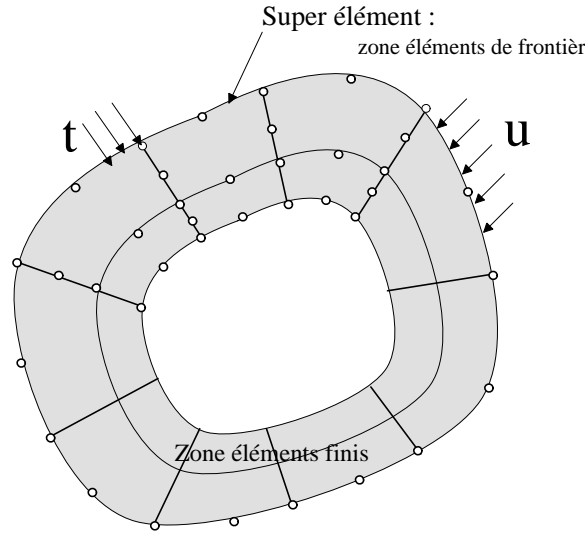


Figure III.1 : Une excavation entourée d'éléments finis couplée à une zone éléments de frontière infinie.

Le choix d'adopter l'une ou l'autre dépend essentiellement des environnements numériques déjà existants et opérationnels. En ce qui nous concerne, nous nous sommes orientés vers la première approche citée. Nous nous proposons donc dans le cadre de notre mémoire de présenter la méthode exposée dans [80] et reprise plus tard par [74, 26] pour montrer son fonctionnement numérique. La construction d'un tel super-élément intégral en élasticité tridimensionnelle a pour principal objectif une comparaison en termes de qualité des résultats et de temps CPU avec le super-élément construit à partir de l'*approche variationnelle* que nous avons développée dans le cadre de notre travail et détaillée en section (III.3). Une telle étude requiert tout d'abord l'optimisation de l'ensemble des algorithmes d'intégration pour les deux approches et sur les deux plans : qualité des résultats et temps CPU.

III.2 Couplage par la méthode des collocations

Considérons un domaine Ω partitionné en deux sous domaines Ω_{EI} et Ω_{EF} discrétisés respectivement par la méthode des éléments de frontière et par la méthode des éléments finis. Comme nous le verrons un peu plus loin dans le mémoire (en section IV.3.1), la discrétisation de l'équation intégrale de frontière qui décrit le domaine Ω_{EI} nous permet d'écrire le système d'équations suivant :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{t} \quad (\text{III.1})$$

Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{t} collectent les valeurs nodales respectivement en déplacements et en

tensions. Notons que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont pleines. La matrice \mathbf{A} est carrée et la matrice \mathbf{B} ne l'est pas nécessairement en raison d'éventuels dédoublements des noeuds en tensions. D'autre part, l'écriture du système matriciel dérivant de la discrétisation du domaine Ω_{EF} par éléments finis s'écrit comme suit :

$$\mathbf{K}_{EF} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{III.2})$$

où \mathbf{F} est le vecteur des forces nodales, et \mathbf{u} celui des déplacements nodaux. La matrice de rigidité \mathbf{K}_{EF} du domaine est symétrique et présente une structure en bande. Afin de traiter le domaine Ω_{EI} comme un super-élément fini, il est important de transformer le vecteur des tensions nodales donné par :

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (\text{III.3})$$

en vecteur de forces nodales équivalentes de manière à écrire que :

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{M} \mathbf{t} \quad (\text{III.4})$$

Chaque terme m qui contribue à la construction de la matrice \mathbf{M} est donné par :

$$m = \int_{\partial\Omega_{EF}} N^T N \, dS \quad (\text{III.5})$$

N désignant les fonctions classiques d'interpolation.

Compte tenu de (III.3) et de (III.4), nous écrivons que :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \mathbf{M} \mathbf{t} \\ &= [\mathbf{M} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}] \mathbf{u} \\ &= \mathbf{K}_{SE}^c \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

La matrice de rigidité du domaine représenté par le super-élément intégral en utilisant l'approche par collocations s'écrit alors :

$$\mathbf{K}_{SE}^c = [\mathbf{M} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}] \quad (\text{III.7})$$

La matrice \mathbf{K}_{SE}^c n'est pas symétrique, son implantation numérique, nous a permis de vérifier la présence de dissymétries de part et d'autre des termes diagonaux. La mise en oeuvre numérique du super-élément intégral avec une telle matrice de rigidité conduit à des résultats tout à fait satisfaisants en termes de précision comme le confirment les différentes étapes de validation, que l'on présentera dans le prochain chapitre. La technique de symétrisation forcée, qui consiste à poser que :

$$\mathbf{K}_{SE}^c = \frac{1}{2} [(\mathbf{M} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}) + (\mathbf{M} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A})^T] \quad (\text{III.8})$$

a été mise en défaut dans le cadre de ce travail, vu la médiocrité des résultats numériques qui en découlent. Cette approche a déjà été critiquée dans plusieurs travaux [7, 11, 48, 70], et il s'est avéré que l'utilisation de la matrice non symétrisée conduit à des résultats nettement meilleurs en termes de précision, ce qui a bien été vérifié dans les quelques exemples de validation testés et dont les résultats seront présentés dans le prochain chapitre.

III.3 Couplage par les formulations intégrales variationnelles

Devant l'impossibilité d'obtenir une matrice de rigidité symétrique pour le super-élément intégral en utilisant les méthodes intégrales dites *traditionnelles*, nous nous sommes orientés vers l'exploration de la méthode symétrique de Galerkin [64, 65] et plus exactement vers celle qui résulte d'un principe variationnel, dont les bases la formulant ont été présentées dans le chapitre précédent. Nous avons voulu, dans un premier temps, examiner d'un peu plus près les propriétés énergétiques de ces méthodes et opter par la suite pour la construction de notre matrice de rigidité en exploitant au mieux ces mêmes propriétés. La matrice de rigidité telle que nous l'avons construite, dans le cadre de notre travail, repose sur l'utilisation de la notion d'*énergie de frontière*. Dans un but plutôt pédagogique, il nous a paru préférable et nécessaire de rappeler certaines des propriétés qui caractérisent cette *énergie de frontière*. C'est ainsi que nous aborderons les notions de *symétrie*, de *semi-positivité*, d'*équilibre*,... etc. Nous montrerons par la suite que notre approche de construction de la matrice de rigidité préserve naturellement toutes ces propriétés sans avoir recours par exemple à une méthode de symétrisation forcée, comme cela a été le cas malheureusement pour l'approche par *collocations*.

Pour ce faire, proposons nous de considérer, dans un cas général un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Ce dernier est traité comme un super-élément et notre démarche s'insère et ne demeure valable qu'en élasticité statique tridimensionnelle.

III.3.1 Énergie de frontière du domaine

Nous posons $\varepsilon(\mathbf{x})$ comme étant le tenseur des déformations en un point \mathbf{x} du domaine Ω et $\sigma(\mathbf{x})$ le tenseur des contraintes correspondant obtenu par la loi de Hooke :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (\text{III.9})$$

\mathbf{C} est le tenseur de Hooke représente la matrice de rigidité du matériau considéré. L'énergie de déformation du domaine est ainsi remplacée par :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x}) d\Omega_x = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS \quad (\text{III.10})$$

D'après [40] le deuxième terme de la précédente équation n'est autre que *l'énergie de frontière* du domaine. Les champs des déplacements \mathbf{u} et des tensions \mathbf{t} , doivent être pris égaux à la trace sur la frontière $\partial\Omega$ des champs élastostatiques $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ définis sur Ω . Cette condition demeure essentielle pour garantir l'existence de cette énergie de frontière. L'équation (III.10) est prise comme le point de départ de notre approche en vue de formuler l'expression de la matrice de rigidité du domaine Ω . Mais avant d'aller plus loin, essayons d'explorer d'abord, et comme il a été proposé dans [66], les différentes propriétés de cette énergie de frontière. D'après (III.9), le champ élastostatique $\boldsymbol{\sigma}$ en un point $\mathbf{x} \in \Omega$ est formé à partir du champ indépendant $\boldsymbol{\varepsilon}$ en ce même point par simple utilisation de la loi de Hooke. Parallèlement et dans le but d'obtenir la rigidité du domaine Ω en utilisant cette énergie de frontière, nous pouvons supposer qu'il y a une dépendance entre le vecteur des tensions $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ sur la frontière et le vecteur indépendant des déplacements \mathbf{u} . On note aussi que lorsque le champ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ est fonction du champ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ défini au même point \mathbf{x} , sur la frontière $\partial\Omega$, il existe une dépendance entre le champ des tensions $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ en \mathbf{x} et le champ des déplacements élastiques $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ en un point \mathbf{y} . Nous supposons donc l'existence d'un opérateur \mathcal{L} liant le vecteur $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ et le vecteur des déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ sur la frontière $\partial\Omega$ que nous notons comme suit :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) \quad \text{avec} \quad \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} \in \partial\Omega \quad (\text{III.11})$$

Cette écriture signifie que l'opérateur \mathcal{L} transforme une fonction définie à travers la frontière $\partial\Omega$ en une autre fonction définie sur la même frontière.

Dans l'esprit de simplifier l'écriture, nous posons :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, dS = \langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle \quad (\text{III.12})$$

Soient \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 deux champs en tensions définis sur la frontière $\partial\Omega$, dépendants de deux champs en déplacements \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 . L'opérateur \mathcal{L} présente les propriétés suivantes :

◇ **Linéarité**

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1) + \mathcal{L}(\mathbf{u}_2)$$

◇ **Auto-adjonction**

$$\langle \mathcal{L}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathcal{L}(\mathbf{u}_2) \rangle$$

◇ **Equilibre**

$$\langle \mathcal{L}(\mathbf{u}), \mathbf{u}_{rigide} \rangle = 0 \quad \text{pour tout mouvement de corps rigide } \mathbf{u}_{rigide}$$

◇ **Mouvement de corps rigide libre**

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_{rigide}) = 0$$

◇ **Semi-définition positive**

$$\frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \geq 0$$

l'égalité a lieu uniquement pour $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{rigide}$.

Revenons à notre problème initial où il était question de définir une matrice de rigidité pour le domaine Ω représenté par le super-élément, en nous basant sur l'utilisation de cette *énergie de frontière* plutôt que l'énergie de déformation élastique du domaine considéré. Le but reste de montrer comment une matrice de rigidité qui dérive de cette énergie de frontière préserve toutes les propriétés énoncées ci dessus.

ENERGIE DE FRONTIÈRE ET MATRICE DE RIGIDITÉ.

A l'interface $\partial\Omega$ commune aux domaines éléments de frontières et éléments finis à assembler nous écrivons le champ des déplacements \mathbf{u} en fonction du vecteur des valeurs nodales \mathbf{u}_m et de la matrice des fonctions d'interpolation usuelles \mathbf{N}_m .

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_m \mathbf{u}_m \quad (\text{III.13})$$

En exploitant la propriété de linéarité de l'énergie de frontière nous écrivons l'expression du vecteur des tensions \mathbf{t} sur la frontière $\partial\Omega$ correspondant aux déplacements \mathbf{u} comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}) &= \mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{y}) \\ &= \mathcal{L}[\mathbf{N}_m(\mathbf{y})\mathbf{u}_m] \\ &= [\mathcal{L}\mathbf{N}_m(\mathbf{y})]\mathbf{u}_m \end{aligned}$$

En nous référant à l'équation (III.10), nous posons que l'*énergie de frontière* est donnée par :

$$\begin{aligned} W_F &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m)^T \langle \mathcal{L}\mathbf{N}_m, \mathbf{N}_m \rangle \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m)^T \mathbf{K}^T \mathbf{u} \end{aligned}$$

La matrice \mathbf{K} sous sa forme explicite est donnée par :

$$\mathbf{K} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_m^T(\mathbf{x}) [\mathcal{L}\mathbf{N}_m](\mathbf{x}) dS$$

En prenant en compte les propriétés de *symétrie*, d'*équilibre*, de *semi-positivité*..etc de l'opérateur \mathcal{L} de l'*énergie de frontière*, nous concluons que la matrice de rigidité \mathbf{K} ainsi construite présente les propriétés suivantes :

◇ P₁ : **Symétrie**

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$$

◇ P₂ : **Equilibre**

$$(\mathbf{u}_m)^T \mathbf{K}^T \mathbf{u}_{rigide}^m = 0$$

◇ P₃ : **Semi-positivité**

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}_m^T \mathbf{K}^T \mathbf{u}_m \geq 0$$

◇ P₄ : **Nullité de l'énergie pour les modes rigides**

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_{rigide}^m = 0$$

Bien évidemment, la matrice \mathbf{K} telle qu'elle est présentée ci dessus ne peut pas être construite étant donné que l'opérateur \mathcal{L} reste inconnu. Le but que nous avons voulu atteindre est simplement de montrer comment une matrice \mathbf{K} dérivant d'une *énergie de frontière* peut présenter les propriétés P₁, P₂, P₃ et P₄. Il nous reste donc à construire par équations intégrales variationnelles, cet opérateur \mathcal{L} liant les deux champs de tension $\mathbf{t} = \mathcal{L}\mathbf{u}$ et de déplacements \mathbf{u} .

III.3.2 Construction par approche intégrale variationnelle

Nous aurons recours à la méthode des équations intégrales, pour construire l'opérateur qui lie la variable \mathbf{t} à la variable \mathbf{u} et construire ainsi une *énergie de frontière* en fonction d'une seule variable \mathbf{u} , prise comme variable primale de façon à pouvoir écrire que $W_F \equiv W_F(\mathbf{u})$.

En équations intégrales traditionnelles, les variables \mathbf{t} et \mathbf{u} sont liées par l'identité de Somigliana ou l'équation intégrale de frontière en traction. Dans l'approche variationnelle de Galerkin, nous avons vu que les deux équations en déplacement et en traction sont simultanément prises en compte. Dans cet ordre d'idées, nous considérons alors dans un premier temps que les tensions \mathbf{t} sont résultantes des déplacements \mathbf{u} imposés le long de toute la frontière $\partial\Omega$ ($\partial\Omega = S_u$ et $S_T = \emptyset$), ce qui revient alors à considérer le problème de *Dirichlet*. Dans un deuxième temps nous supposons que les déplacements \mathbf{u} résultent des tensions \mathbf{t} imposées le long de toute la frontière $\partial\Omega$ ($\partial\Omega = S_T$ et $S_u = \emptyset$). Le problème de Neumann est ainsi considéré. Comme nous le verrons un peu plus loin dans la section (IV.4.1), nous adoptons la méthode de Galerkin pour le choix des fonctions pondérales $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{t}}$, en vue d'assurer la symétrie dans les coefficients matriciels résultants de la discrétisation des formulations intégrales variationnelles. Nous poserons alors que :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$$

Les deux problèmes de Dirichlet et de Neumann s'écrivent respectivement comme suit :

$$\bar{\mathcal{B}}_{tt}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \bar{\mathcal{B}}_{ut}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) + D_{ut}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) \quad (\text{III.14})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{uu}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \bar{\mathcal{B}}_{tu}(\mathbf{t}, \mathbf{u}) + D_{tu}(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \quad (\text{III.15})$$

En soustrayant (III.15) de (III.14) membre à membre et en adoptant une écriture simplifiée pour les différentes formes bilinéaires $\bar{\mathcal{B}}_{ab}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{\mathcal{B}}_{ab}$ et linéaires $\mathcal{D}_{ab}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathcal{D}_{ab}$, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\bar{\mathcal{B}}_{tt} - \bar{\mathcal{B}}_{uu} = \mathcal{D}_{ut} - \mathcal{D}_{tu}$$

Compte tenu de (II.77) et (II.81), l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}_{tt} - \bar{\mathcal{B}}_{uu} &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle \\ &= 2W_F \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Les étapes qui suivent ont pour principal objectif d'éliminer le vecteur des tensions pour obtenir ainsi l'expression de l'énergie de frontière en fonction des déplacements uniquement. C'est bien ainsi que nous pouvons déduire de (III.14) que :

$$\mathcal{I}_d = (\bar{\mathcal{B}}_{ut} + D_{ut})\bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1}$$

où \mathcal{I}_d désigne la fonction identité. L'égalité (III.16) peut se présenter alors sous la forme :

$$\begin{aligned} 2W_F &= \mathcal{I}_d \bar{\mathcal{B}}_{tt} \mathcal{I}_d^T - \bar{\mathcal{B}}_{uu} \\ &= (\bar{\mathcal{B}}_{ut} + D_{ut})\bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1}(\bar{\mathcal{B}}_{ut} + D_{ut})^T - \bar{\mathcal{B}}_{uu} \\ &= (\bar{\mathcal{B}}_{ut} + D_{ut})\bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1}(\bar{\mathcal{B}}_{tu} + D_{tu}) - \bar{\mathcal{B}}_{uu} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

On posera alors que :

$$\mathcal{G}_{uu} = (\bar{\mathcal{B}}_{ut} + D_{ut})\bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1}(\bar{\mathcal{B}}_{tu} + D_{tu})$$

Il est important de préciser que \mathcal{G}_{uu} se présente sous forme d'une fonction bilinéaire en \mathbf{u} . Nous avons donc pu construire notre opérateur \mathcal{L} qui lie les champs \mathbf{t} et \mathbf{u} et exprimer par la même occasion l'énergie de frontière du domaine en fonction uniquement de la variable primale \mathbf{u} .

$$\begin{aligned} W_F &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ (\bar{\mathcal{B}}_{ut} + D_{ut})\bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1}(\bar{\mathcal{B}}_{tu} + D_{tu}) - \bar{\mathcal{B}}_{uu} \} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

La discrétisation des formes $\mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ conduit à l'expression de la matrice de rigidité \mathbf{K}_{SE} du super-élément intégral et les détails de cette phase seront exposés dans la section suivante. L'expression de l'énergie de frontière du problème continu telle qu'elle est présentée en (III.18) est *exacte*, par contre sa forme discrétisée ne l'est plus. En effet, le même couple (\mathbf{u}, \mathbf{t}) ne satisfait pas exactement et simultanément les deux équations discrétisées des problèmes de Neumann et de Dirichlet. Une discussion détaillée de ce point est menée dans [66].

La forme $\mathcal{K}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ présente les propriétés P₁–P₄ de *symétrie*, d'*équilibre*, etc. Pour construire sa forme discrétisée nous procéderons aux approximations de la frontière $\partial\Omega$ ainsi que des champs de déplacements \mathbf{u} et de tensions \mathbf{t} en fonction des valeurs nodales \mathbf{u}_m et \mathbf{t}_m et des fonctions d'interpolation N_m , en ayant recours à la méthode des éléments de frontière. Les concepts de cette méthode ainsi que l'ensemble des étapes de discrétisation seront exposés en section (IV.2) du prochain chapitre. A ce niveau de notre mémoire, nous nous contenterons d'écrire que les champs de déplacements et de tensions approximatés sont donnés par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = N_m(\mathbf{x})\mathbf{u}_m \quad (\text{III.19})$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = N_m(\mathbf{x})\mathbf{t}_m \quad (\text{III.20})$$

III.3.3 Construction de la matrice de rigidité

Nous reprenons les écritures des problèmes de Neumann (III.15) et de Dirichlet (III.14) mais cette fois-ci sous leurs formes discrétisées. Nous approximations les déplacements et les tensions selon (III.19) et (III.20) et nous désignerons par \mathbf{B}_{ab} les matrices résultantes de la discrétisation des différentes formes bilinéaires $\bar{\mathcal{B}}_{ab}$ et par \mathbf{D}_{ab} celles qui résultent de la discrétisation des formes linéaires \mathcal{D}_{ab} . Les problèmes de Dirichlet et de Neumann se mettent alors sous les formes respectives suivantes :

$$\mathbf{t}_m^T \mathbf{B}_{tt} \mathbf{t}_m = \mathbf{u}_m^T \{ \mathbf{B}_{ut} + \mathbf{D}_{ut} \} \mathbf{t}_m \quad (\text{III.21})$$

$$\mathbf{u}_m^T \mathbf{B}_{uu} \mathbf{u}_m = \mathbf{t}_m^T \{ \mathbf{B}_{tu} + \mathbf{D}_{tu} \} \mathbf{u}_m \quad (\text{III.22})$$

Nous écrivons alors l'expression de l'énergie de frontière sous sa forme approximée \bar{W}_F :

$$\bar{W}_F = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m^T \{ (\mathbf{B}_{ut} + \mathbf{D}_{ut}) \mathbf{B}_{tt}^{-1} (\mathbf{B}_{tu} + \mathbf{D}_{tu}^T) - \mathbf{B}_{uu} \} \mathbf{u}_m$$

Nous déduisons l'expression de la matrice de rigidité \mathbf{K}_{SE} du super élément discrétisé par équations intégrales variationnelles que nous écrivons comme suit :

$$\mathbf{K}_{SE} = (\mathbf{B}_{ut} + \mathbf{D}_{ut}) \mathbf{B}_{tt}^{-1} (\mathbf{B}_{tu} + \mathbf{D}_{tu}^T) - \mathbf{B}_{uu} \quad (\text{III.23})$$

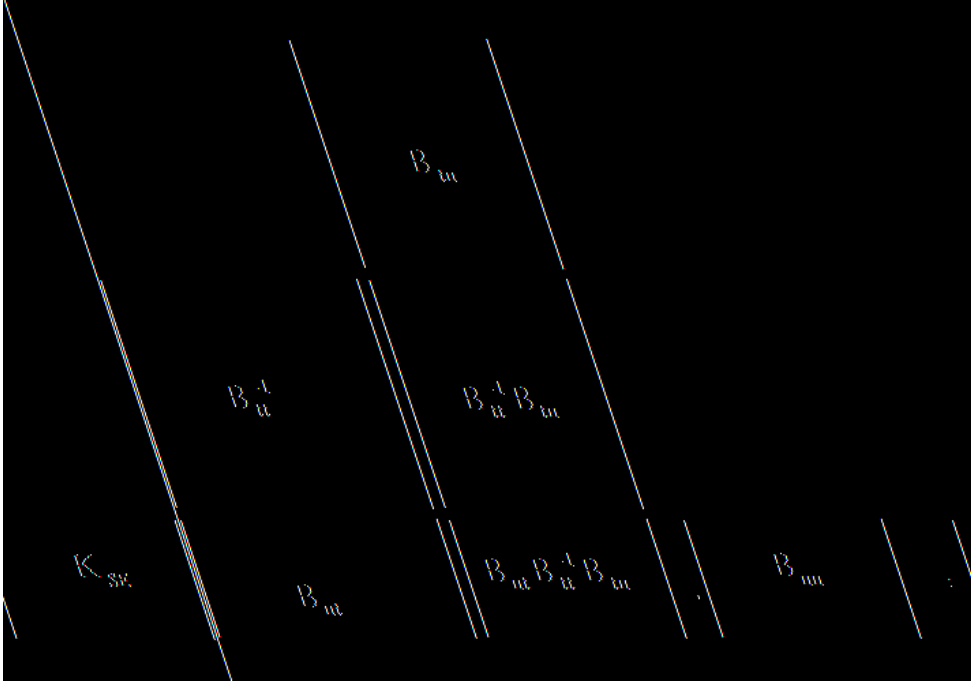


Figure III.2 : Représentation schématique de la construction de la matrice \mathbf{K}_{SE} .

La matrice \mathbf{K}_{SE} ainsi construite est symétrique et peut être assemblée à celle du domaine complémentaire discrétisé par éléments finis. Dans le cas d'un domaine Ω borné, les termes qui constituent la matrice \mathbf{D}_{ut} s'annulent ($\kappa = 0$). La matrice de rigidité du super élément représentant un domaine borné se réduit alors à l'écriture suivante :

$$\mathbf{K}_{SE} = \mathbf{B}_{ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{tu} - \mathbf{B}_{uu} \quad (\text{III.24})$$

III.3.4 Propriétés de la matrice \mathbf{K}_{SE}

La matrice \mathbf{K}_{SE} préserve toutes les propriétés P_1 – P_4 citées précédemment. Les caractères de *symétrie* et de *semi-positivité* sont une conséquence directe du fait que la matrice dérive d'une minimisation d'une entité énergétique. La propriété P_4 est nécessaire pour tout élément fini pour passer le test patch de convergence [8].

Les différentes matrices \mathbf{B}_{tt} , \mathbf{B}_{uu} sont symétriques et \mathbf{B}_{tu} , \mathbf{B}_{ut} sont transposées l'une de l'autre. Il est évident que lors de la construction de la matrice \mathbf{K}_{SE} , il convient de tenir compte de toutes ces propriétés afin d'obtenir un gain de temps substantiel lors de la construction de \mathbf{K}_{SE} . Les détails relatifs à la construction de ces différentes matrices seront présentés lors de la description de la phase d'implantation numérique. La propriété de symétrie dont dispose la matrice \mathbf{K}_{SE} nous permet d'utiliser les solveurs pour matrices symétriques de CAST3M.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les deux approches de couplage *éléments de frontière-éléments finis* mises en oeuvre dans le cadre de ce travail. La première méthode reposant, sur l'approche par collocations, a déjà fait l'objet de nombreux travaux et ne présente pas le caractère original de notre travail. Elle conduit à une matrice de rigidité non symétrique. La technique de symétrisation forcée a bien montré ses limitations en aboutissant à des résultats d'une précision médiocre. Néanmoins, la mise en oeuvre de cette matrice non symétrique met en jeu l'évaluation d'intégrales de surface simples et les algorithmes la décrivant demeurent moins complexes que l'approche utilisant les méthodes intégrales symétriques de Galerkin. Cette dernière approche a conduit à la construction d'une matrice de rigidité symétrique. La mise en oeuvre de cette dernière constitue l'apport innovant de cette thèse. Son implantation numérique fait appel au développement de divers algorithmes d'intégration spécifiques. Ces derniers demeurent lourds à mettre en oeuvre et seront décrits et détaillés dans le prochain chapitre.

Chapitre IV

Mise en oeuvre numérique

IV.1 Introduction

La méthode des éléments de frontière repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. Elle utilise les mêmes notions que la méthode des éléments finis à savoir : maillage, interpolation par fonctions de forme. Dans une discrétisation par éléments de frontière, deux étapes sont nécessaires et conduisent à deux niveaux d'erreurs distincts. La première consiste à approcher la frontière du domaine par des éléments de surface et dans le cadre de notre travail nous nous sommes limités aux éléments quadrilatéraux à huit noeuds. La deuxième étape se résume à la discrétisation des champs inconnus dans le cas d'un support géométrique déjà approché. Nous verrons dans ce chapitre que les deux approches exposées dans le chapitre (II) utilisent les mêmes principes pour approximer la géométrie et les champs inconnus. L'ensemble des étapes de discrétisation et d'évaluation des intégrales simples dans l'approche par collocations et doubles dans l'approche variationnelle, seront présentées dans ce chapitre.

IV.2 Méthode des éléments de frontière

DISCRÉTISATION DE LA GÉOMÉTRIE.

Pour ce faire on introduit une discrétisation de la frontière $\partial\Omega$ caractérisée par N_e éléments finis de frontière, des quadrilatères à huit noeuds et une famille de N_I points dits d'*interpolation*.

$$\partial\Omega \simeq \bigcup_{e=1}^{N_e} E_e \quad (\text{IV.1})$$

Après avoir introduit l'antécédent $\boldsymbol{\xi}$ de $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{\xi})$, chaque élément E_e de la frontière approchée est décrit par le paramétrage suivant :

$$\boldsymbol{y} = \sum_{m=1}^{N_I} N_m(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{y}^m \quad (\text{IV.2})$$

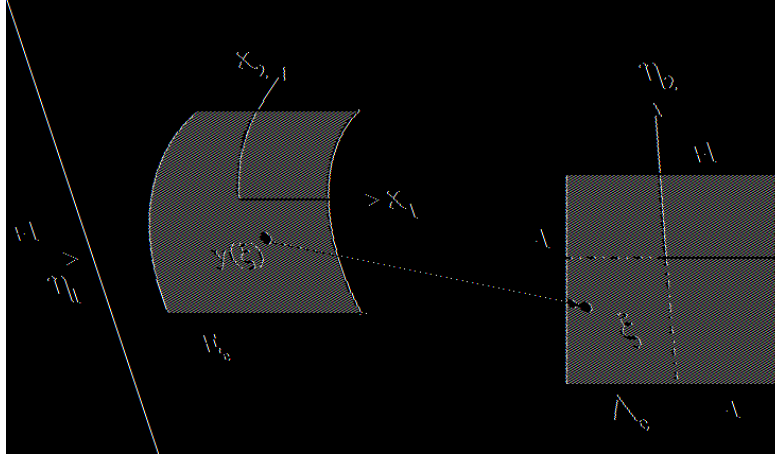


Figure IV.1 : Description de l'élément de frontière E_e et de référence Δ_e .

Les points d'*interpolation* sont pris confondus avec les noeuds géométriques; les éléments sont alors qualifiés d'*isoparamétriques*.

D'autre part, nous notons respectivement, $\mathbf{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ ($\alpha = 1, 2$) et $\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})$, la base naturelle du plan tangent et de la normale unitaire au point $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$:

$$\mathbf{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{y}_{,\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=1}^{N_I} N_{m,\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}^m \quad (\text{IV.3})$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|} \quad (\text{IV.4})$$

Il faut évidemment que $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ soient linéairement indépendants pour tout $\boldsymbol{\eta} \in E_e$, condition nécessaire pour que l'élément soit non-dégénéré (existence de la normale et du jacobien).

ELÉMENT DIFFÉRENTIEL SURFACIQUE

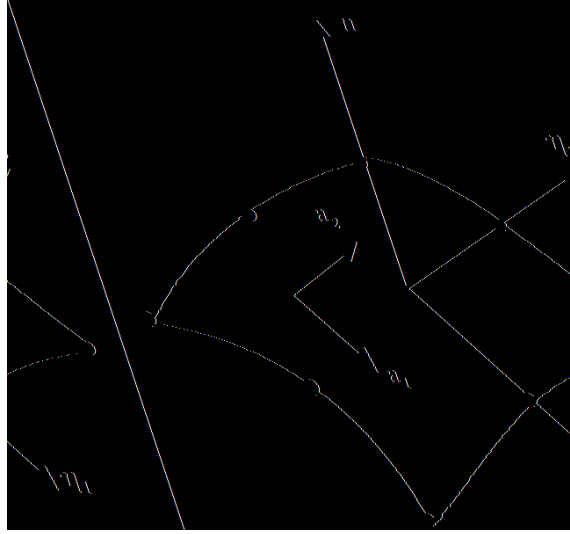
L'évaluation des intégrales élémentaires demande l'évaluation de l'élément différentiel de surface dS_y et la théorie des surfaces donne :

$$\begin{aligned} dS_y(\boldsymbol{\xi}) &= J_y(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= [g_{11}(\boldsymbol{\xi})g_{22}(\boldsymbol{\xi}) - g_{12}(\boldsymbol{\xi})^2]^{\frac{1}{2}} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

avec

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$$

$J_y(\boldsymbol{\xi})$ désigne le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes \mathbf{y} en coordonnées intrinsèques $\boldsymbol{\xi}$.

Figure IV.2 : Définition de la base naturelle du plan tangent \mathbf{a}_α

DISCRÉTISATION DES CHAMPS.

On construit alors sur chaque élément de frontière une approximation des différentes grandeurs inconnues. Chacun des *points d'interpolation* est associé à une fonction d'interpolation N classiquement utilisée dans la méthode des éléments finis [8] ou en éléments de frontière [16, 18]. Les grandeurs inconnues peuvent être écrites de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{N_I} N_m(\mathbf{y}) \mathbf{u}^m \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{N_I} N_m(\mathbf{y}) \mathbf{t}^m \quad (\text{IV.6})$$

\mathbf{u}^m et \mathbf{t}^m désignent les valeurs prises par les champs \mathbf{u} et \mathbf{t} aux points d'interpolation. Le champ de déplacement \mathbf{u} est pris *continu* sur la frontière $\partial\Omega$ de manière à garantir la conformité de la méthode. L'interpolation est donc construite de manière à assurer la continuité du champ interpolé à la jonction de deux éléments. Le vecteur-tension quant à lui peut théoriquement être choisi continu par morceaux et donc défini indépendamment sur chaque élément. Dans ce cas on parle de *non conformité totale* comme cela est suggéré dans [2]. Cette approche augmente d'une manière significative le nombre d'inconnues nodales en tensions. Nous avons donc préféré envisager une approximation partiellement *non-continue*, ne présentant des discontinuités qu'au voisinage des arêtes et des coins.

IV.3 Résolution par approche par collocations

Les différentes équations intégrales en déplacements ou en contraintes introduites dans les sections précédentes n'ont pas de solutions analytiques connues. On construit donc des solutions

approchées par une méthode d'éléments de frontière. Ce paragraphe décrit la méthode des éléments de frontière reposant sur l'approche par collocations. Rappelons que celle-ci consiste à introduire une discrétisation de l'équation intégrale de frontière en déplacement (II.28) ou en contrainte prise en un nombre fini de points \mathbf{x} dits de *collocation*. Ce nombre n'est pas arbitraire et doit être suffisant pour fournir le nombre d'équations nécessaire à la détermination des inconnues.

PROBLÈME DISCRÉTISÉ ET ÉVALUATION DES INTÉGRALES.

La méthode des collocations consiste à introduire les approximations précédemment décrites et à écrire que les équations régissant le système sont vérifiées aux points de *collocation* dont le nombre est pris égal au nombre d'inconnues nodales du problème. Cette approche est majoritairement utilisée dans de nombreux travaux, du fait qu'elle est naturellement adaptée au formalisme par équations intégrales tel qu'il est construit précédemment. En l'absence de forces de volume, l'équation intégrale de frontière régularisée en déplacement (II.28) sous sa forme discrétisée se résume à l'écriture suivante :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{E_e} \{[\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_c)] T_i^k(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) - \mathbf{t}(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}_c, \mathbf{y})\} J_y(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (\text{IV.7})$$

$J_y(\boldsymbol{\xi})$ désigne, pour l'élément $E(\mathbf{y})$, le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes \mathbf{y} en coordonnées intrinsèques $\boldsymbol{\xi}$. \mathbf{x}_c étant le point de *collocation* pour lequel on écrit l'équation intégrale de frontière.

Les intégrales élémentaires (IV.7) ont pour support un élément fini de frontière. Le grand avantage du processus de régularisation (II.4.2) est qu'il permet l'obtention d'intégrales élémentaires faiblement singulières ou régulières selon que le point de *collocation* appartient à l'élément d'intégration ou pas. Le traitement des intégrales régulières peut être mené sans difficulté majeure et reste une application directe de la quadrature de Gauss. Celle ci est exposée dans bon nombre d'ouvrages sur la théorie de l'intégration numérique [35, 36, 8].

Le nombre de points d'intégration de Gauss à utiliser varie selon les positions relatives du point de *collocation* \mathbf{y} par rapport à l'élément d'intégration E_e parcouru par le point \mathbf{x} . C'est une particularité bien évidemment spécifique aux méthodes des équations intégrales, vu que ces dernières font appel à des solutions élémentaires et leurs dérivées. Celles-ci présentent des variations en r^{-1} , r^{-2} et parfois en r^{-3} , ce qui entraîne des variations très fortes de l'intégrand sur E_e si le point de *collocation* \mathbf{x}_c est très proche de E_e . Ces mêmes intégrands deviennent sensiblement constants si ce même point s'éloigne de l'élément d'intégration. Nous avons donc adapté le nombre de points d'intégration en faisant appel au critère d'optimisation de *Stroud et Secrest* [67, 47]. Une autre technique possible est le recours au critère d'*indicateur de sévérité*

avancé par [61] qui sera reprise plus loin dans le détail. L'intégrale devient par contre faiblement singulière (en $1/r$) si le point de *collocation* se situe sur l'élément d'intégration. L'évaluation de ce type d'intégrales se base sur l'utilisation d'une technique de subdivision en deux ou trois triangles [47, 73] selon que le point de *collocation* se situe sur un coin de l'élément quadrilatéral ou sur un de ses côtés.

IV.3.1 Construction du système d'équations

Nous écrivons N_I équations de type (IV.7) pour tous les noeuds de la frontière discrétisée. A chacun des noeuds sont associées trois inconnues en tension, en déplacement ou une combinaison des deux. Le point de *collocation* occupe successivement tous les noeuds de contrôle de la frontière et trois équations sont ainsi écrites pour chaque position du point de *collocation*. On construit, de ce fait, N_I blocs de trois équations présentant la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{t} \quad (\text{IV.8})$$

Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{t} collectent les valeurs nodales respectivement en déplacements et en tensions. Notons que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont pleines. La matrice \mathbf{A} est carrée et la matrice \mathbf{B} ne l'est nécessairement pas en raison d'éventuels dédoublements des noeuds en tensions. Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes contentés de construire les deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} à partir desquelles on construit la matrice de rigidité du super-élément intégral \mathbf{K}_{SE}^C , sans aller jusqu'à l'étape de résolution.

Quoique cette méthode, à laquelle on a attribué l'adjectif de *traditionnelle*, soit certainement la plus utilisée et répandue, elle présente néanmoins quelques limites et inconvénients qui se résument essentiellement par une non-symétrie dans les opérateurs matriciels qui en découlent. C'est sur cette approche que nous nous sommes basés pour construire la méthode de couplage non symétrique présentée en section (III.2) du chapitre précédent.

IV.4 Résolution par approche variationnelle

Dans les sections précédentes, nous avons montré comment la procédure de *régularisation* nous a permis d'écrire les formulations variationnelles symétriques de Galerkin sous la forme d'une double intégrale dont l'extérieure est régulière et l'intérieure est faiblement singulière. Ce traitement analytique préalable de la singularité des fonctions noyaux est d'un *grand secours* et une anticipation pour la phase de mise en oeuvre numérique. D'autre part la symétrie des formulations obtenues ne garantit pas celle des coefficients matriciels découlant de la phase de discrétisation et d'intégration. Nous avons vu que les champs en déplacements $\tilde{\mathbf{u}}$ et en tensions $\tilde{\mathbf{t}}$ qui caractérisent les formulations intégrales variationnelles jouent le rôle de fonctions

de pondération (similaire à l'approche par résidus pondérés). Nous nous proposons donc de procéder à la discrétisation qui assurera la symétrie de nos différentes matrices.

IV.4.1 Approximation des fonctions test

Dans la littérature relative à la méthode des éléments finis, il est démontré que l'utilisation d'une discrétisation de type Galerkin lors de laquelle on adopte les mêmes fonctions d'interpolation pour les fonctions pondérales ($\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{t}}$) et les champs inconnus (\mathbf{u} et \mathbf{t}). Nous nous proposons alors de poser que :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$$

La seconde étape consiste, comme pour l'approche par collocation, à discrétiser la géométrie et les champs inconnus. Les descriptions de la géométrie et des champs inconnus sont données par les expressions (IV.1), (IV.2) et (IV.6). Il nous reste donc à évaluer les doubles intégrales présentes dans ces formulations. Cette étape sera suivie par la construction des différentes matrices $\mathbf{B}_{\mathbf{ab}}$ qui forment la matrice de rigidité $\mathbf{K}_{\mathbf{SE}}$ du super-élément intégral variationnel.

IV.4.2 Discrétisation et évaluation des doubles intégrales

Les équations dérivant de l'approche variationnelle se présentent sous des formes bilinéaires. La détermination de chacune de ces dernières consiste à évaluer la forme analytique suivante :

$$I(E_1, E_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_x \, dS_y \quad \text{avec} \quad \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in O(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-1}) \quad (\text{IV.9})$$

E_1 et E_2 sont les supports géométriques de types surfaciques des deux éléments d'intégration l'un qualifié d'*élément extérieur* (parcouru par le point d'intégration \mathbf{x}) et l'autre d'*élément intérieur* (parcouru par le point d'intégration \mathbf{y}). Dans notre cas nous pouvons distinguer quatre types d'intégrations suivant que les points d'intégration \mathbf{x}, \mathbf{y} parcourent le même élément simultanément, deux éléments distincts ou deux éléments présentant un coté ou un coin en commun.

- ◇ *Intégration régulière* : les deux éléments d'intégration sont distincts et ne présentent ni coté ni angle en commun. L'intégration régulière ne pose aucune difficulté. La double intégrale est évaluée par l'application directe de la double quadrature de Gauss [8].
- ◇ *Intégration coïncidente* : les deux éléments d'intégration sont confondus. Un traitement particulier est réservé à ce type d'intégrations singulières. Dans ce contexte, deux approches ont été implantées et seront développées dans les sections qui suivent. Une étude comparative en qualité de résultats et en temps d'intégration entre ces deux techniques d'intégration a été réalisée.

- ◇ *Intégration adjacente par coté ou par coin* : ces deux cas sont spécifiques aux méthodes intégrales de Galerkin et se traitent différemment selon que la singularité à traiter est répartie sur tout un côté ou confinée en un coin.

Nous considérons l'élément de référence $\Delta_e^{(i)}$ et la transformation $g^{(i)}$ associée à chaque élément réel E_i . Nous introduisons les antécédents $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\xi}$ de $\mathbf{x} = g^{(1)}(\boldsymbol{\eta})$ et de $\mathbf{y} = g^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$. Nous réexprimerons par la suite l'intégrale $I(E_1, E_2)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I(E_1, E_2) &= \int_{\Delta_e^{(1)}} \int_{\Delta_e^{(2)}} \Psi(g^{(1)}(\boldsymbol{\eta}), g^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\Delta_e^{(1)}} \int_{\Delta_e^{(2)}} \Psi(g^{(1)}(\eta_1, \eta_2), g^{(2)}(\xi_1, \xi_2)) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

où

$$\Delta_e^{(i)} = [-1, 1]^2 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2$$

IV.4.3 Intégration régulière

Lorsque les deux éléments d'intégration E_1 et E_2 sont disjoints, la double intégrale est régulière. Elle peut ainsi être évaluée sans difficultés par l'application directe de la double quadrature de Gauss. Ainsi, nous posons N_{pge} et N_{pgi} comme étant le nombre de points

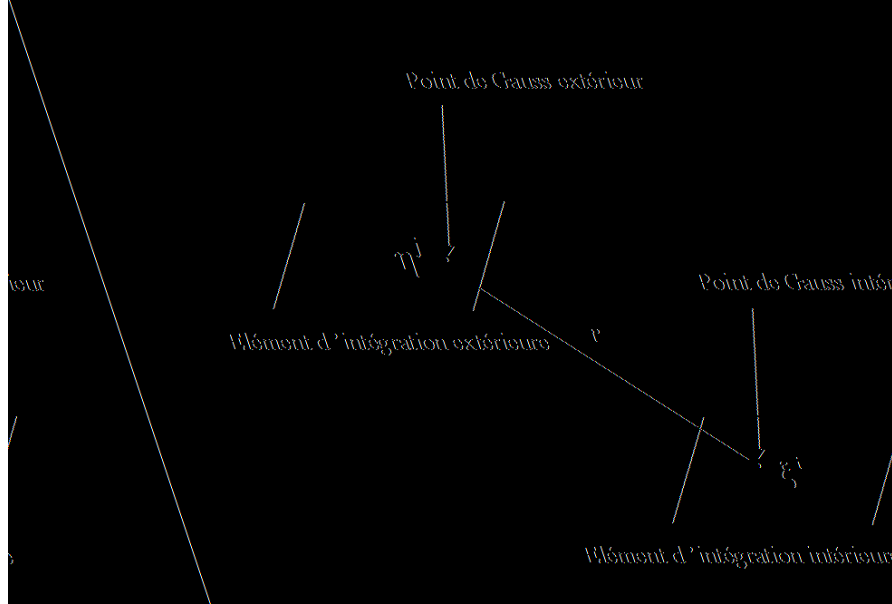


Figure IV.3 : Intégration sur deux éléments disjoints.

de Gauss propres respectivement aux intégrations extérieure et intérieure. Nous désignons par $(\boldsymbol{\xi}^i, A_{\xi}^i)$ et $(\boldsymbol{\eta}^j, A_{\eta}^j)$ les points et poids de Gauss sur les deux éléments de référence. Nous écrivons

alors notre double intégrale régulière sous sa forme d'une double sommation sur les points de Gauss comme suit :

$$I(E_1, E_2) \simeq \sum_{i=1}^{N_{pge}} \sum_{j=1}^{N_{pgi}} A_{\eta}^i A_{\xi}^j \bar{\Psi}(\boldsymbol{\eta}^i, \boldsymbol{\xi}^j) J_y(\boldsymbol{\xi}^i) J_x(\boldsymbol{\eta}^j) \quad (\text{IV.11})$$

Pour préserver la symétrie des formulations intégrales variationnelles, il faut prendre le même nombre de points de Gauss pour les deux intégrations, on pose donc $N_{pge} = N_{pgi}$.

Afin d'estimer correctement ces doubles intégrales régulières, en minimisant le plus possible le temps de la phase d'intégration, N_{pge} et N_{pgi} doivent être adaptés suivant les distances séparant les deux éléments d'intégration. Ces deux paramètres ont donc fait l'objet d'une étude d'optimisation et sont déterminés selon le critère d'*indicateur de sévérité* détaillé dans une section ultérieure (section IV.6).

IV.4.4 Intégration singulière non symétrique

La double intégrale se présente sous la forme d'une intégrale intérieure faiblement singulière par rapport à la variable $\boldsymbol{\xi}$ et d'une intégrale extérieure régulière par rapport à la variable $\boldsymbol{\eta}$. Pour chaque point d'intégration extérieure $\boldsymbol{\eta}$ fixé, l'élément d'intégration de référence singulier Δ_e est subdivisé en quatre triangles Λ^a ($a=1, 4$), dont les bases sont les côtés de l'élément Δ_e et le sommet en commun est le point d'intégration extérieure $\boldsymbol{\eta}$.

Le changement de variables qui suit cette transformation consiste en l'introduction d'une paire de coordonnées (τ_1, τ_2) intrinsèques à chacun des triangles Λ^a considérés et telles que $-1 \leq \tau_1, \tau_2 \leq +1$. Les changements de variables à considérer sur chaque triangle Λ^a sont alors :

$$\xi_i = \eta_i + (\tau_{\alpha} + 1) \mathcal{F}_i^a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i = 1, 2 \\ a = 1, 4 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Sachant que

$$\begin{cases} \alpha = 1 & \text{si } a = 1, 2 \\ \alpha = 2 & \text{si } a = 3, 4 \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Les formes explicites des fonctions $\mathcal{F}_i^a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau})$ sont données comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1^1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = +\frac{1}{2}(1 - \eta_1) \\ \mathcal{F}_2^1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = +\frac{1}{2}(\tau_2 - \eta_2) \\ \mathcal{F}_1^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{2}(1 + \eta_1) \\ \mathcal{F}_2^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) = +\frac{1}{2}(\tau_2 - \eta_2) \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

En tenant compte des transformations adoptées en (IV.12) et (IV.13), on peut toujours écrire que :

$$\mathbf{r} = (\tau_\alpha + 1) \hat{\mathbf{r}}(\tau_1, \tau_2) \quad (\text{IV.15})$$

où $\hat{\mathbf{r}}(\tau_1, \tau_2) \neq 0$ pour la singularité $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$, c'est à dire pour $\tau_1 = -1$. D'autre part, nous déduisons que :

$$d\xi_i = \frac{1}{2}(\tau_\alpha + 1) \mathcal{F}_i^a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau}) d\tau_i \quad (\text{IV.16})$$

Le noyau intérieur faiblement singulier se transforme alors, compte tenu du jacobien de la transformation en :

$$\frac{1}{\mathbf{r}} d\xi_i = \frac{1}{\hat{\mathbf{r}}(\tau_1, \tau_2)} \frac{\mathcal{F}_i^a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau})}{2} d\tau_i \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (\text{IV.17})$$

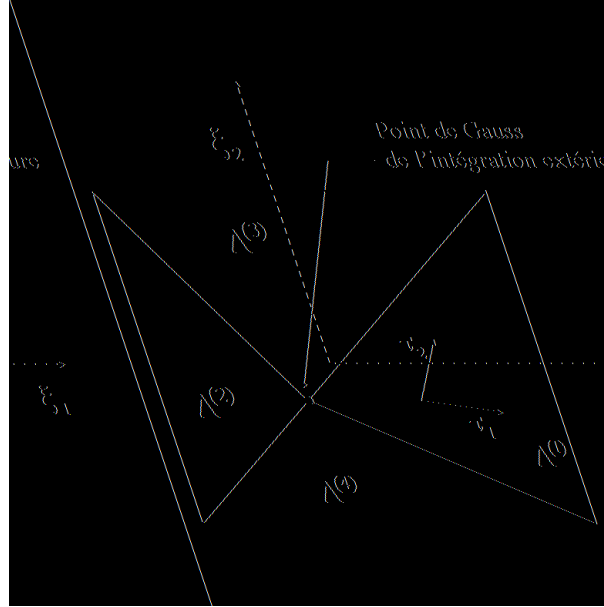


Figure IV.4 : Intégration sur un élément singulier : schéma non symétrique.

Le changement de variables ainsi utilisé régularise l'intégrale intérieure et permet de ce fait son évaluation par application de la quadrature de Gauss. Notons qu'il est possible de procéder à la description de l'élément de référence Δ_e en coordonnées polaires. Cette dernière technique a été exposée dans [16] et appliquée dans [50, 75, 25].

Quoique la procédure d'intégration se basant sur la subdivision en triangles et exposée ci-dessus régularise bien l'intégrale interne en résorbant parfaitement la singularité, elle demeure néanmoins incapable de réserver un traitement similaire aux deux sommations *extérieure* et *intérieure*. Ce trait caractéristique n'est pas en bonne adéquation avec le caractère symétrique

de la formulation variationnelle de Galerkin. Les différentes étapes de validation exposées au chapitre (V) et se rapportant à l'étude du cylindre sous pression interne, ont mis en évidence l'inadéquation de cette technique dans le traitement d'intégrales singulières variationnelles. Elle demeure néanmoins simple à mettre en oeuvre et bien adaptée aux développements propres à l'approche par collocations. Une étude en termes de précision de résultats et de temps d'intégration a suivi la phase d'implantation et sera exposée dans le chapitre (V) des validations numériques. Ce schéma d'intégration demeurant *a priori* non fiable pour ce qui est du respect de la symétrie des différentes intégrales, nous nous sommes proposés de procéder à l'implantation d'un nouveau schéma [19] bien adapté au traitement des intégrales singulières symétriques de Galerkin.

IV.4.5 Intégration singulière symétrique

Les intégrales faiblement singulières apparaissent lorsque l'intersection des supports E_1 et E_2 n'est pas réduite à l'ensemble vide. Dans ce cas, nous utiliserons des schémas d'intégration différents selon que l'on traite d'intégrales sur des éléments coïncidents, adjacents par côté ou par coin. Ces deux derniers cas demeurent une spécificité pour les méthodes intégrales symétriques de Galerkin. Le recours à un schéma d'intégration respectant parfaitement cette symétrie est plus que nécessaire. Notons que des travaux traitant de ce dernier point cité, sont exposés dans [2, 63] et sont relatifs à l'élasticité tridimensionnelle. Le schéma utilisé dans le cadre de ce mémoire a été développé dans le cadre de cette thèse par [19] et utilise des transformations 2D pour se ramener à des changements de variables adéquats dans un espace quadridimensionnel.

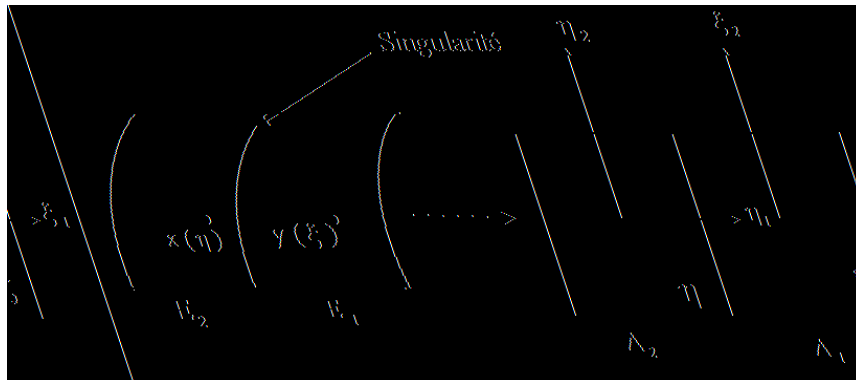


Figure IV.5 : Intégration sur deux éléments adjacents par côté.

INTÉGRATION SUR DEUX ÉLÉMENTS ADJACENTS PAR CÔTÉ.

Dans le cas de l'intégration adjacente par côté, la singularité est répartie seulement sur le côté mis en commun. Elle a lieu quand les deux points d'intégration *extérieur* \mathbf{x} et *intérieur* \mathbf{y} parcourent le côté commun aux deux éléments. La singularité est dans ce cas plus faible que celle du cas coïncident que l'on verra plus loin. Nous considérons le cas adjacent par côté défini par :

$$g^{(1)}(+1, \eta_2) = g^{(2)}(-1, \xi_2) \quad (\text{IV.18})$$

Il est évident que l'intégrale I devient singulière pour $\eta_1 = +1$ et $\xi_1 = -1$. L'idée sous jacente est donc d'utiliser simultanément les transformations 2D pour les paires (η_1, ξ_1) et (η_2, ξ_2) dans l'espace à quatre dimensions $(\eta_1, \xi_1, \eta_2, \xi_2)$, pour obtenir un (ou le bon) changement de variables permettant de se ramener à une intégrande bornée et continue. Nous considérons alors chacun des plans représentatifs des coordonnées (η_1, ξ_1) et (η_2, ξ_2) . L'introduction du paramètre ε_i (avec $i=1, 2$) permet d'écrire les transformations $(\eta_i, \xi_i) \rightarrow (u_i, v_i)$ d'une manière unique pour les deux cas suivants :

$$\diamond \text{ Si } \eta_i > \xi_i \quad \text{alors} \quad \varepsilon_i = +1$$

$$\diamond \text{ Si } \eta_i < \xi_i \quad \text{alors} \quad \varepsilon_i = -1$$

Introduisons alors les transformations suivantes:

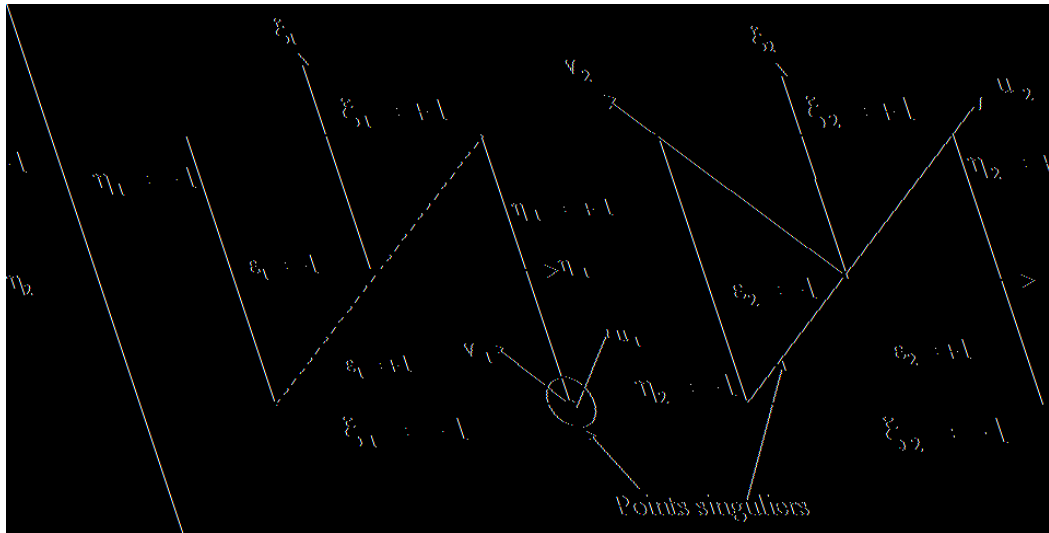


Figure IV.6 : Transformations $(\eta_1, \xi_1) \rightarrow (u_1, v_1)$ et $(\eta_2, \xi_2) \rightarrow (u_2, v_2)$.

◇ **Dans le plan** (η_1, ξ_1)

$$\begin{cases} \eta_1 = u_1 + (v_1 - 1)(\varepsilon_1 u_1 - 1) \\ \eta_2 = u_2 + (v_1 - 1)(\varepsilon_1 u_1 + 1) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -1 \leq u_1 \leq +1 \\ 0 \leq v_1 \leq +2 \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

◇ **Dans le plan** (η_2, ξ_2)

$$\begin{cases} \eta_2 = u_2 + v_2(\varepsilon_2 u_2 - 1) \\ \eta_2 = u_2 + v_2(\varepsilon_2 u_2 + 1) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -1 \leq u_2 \leq +1 \\ -1 \leq v_2 \leq +1 \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

Ce qui nous permet de poser :

$$d\eta_1 d\xi_1 d\eta_2 d\xi_2 = 4[1 + \varepsilon_1(v_1 - 1)][1 + \varepsilon_2 v_2] du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (\text{IV.21})$$

où le jacobien des transformations $(\eta_1, \xi_1) - (u_1, v_1)$ et $(\eta_2, \xi_2) - (u_2, v_2)$ s'écrit :

$$J_{\eta\xi}(u, v) = 4[1 + \varepsilon_1(v_1 - 1)][1 + \varepsilon_2 v_2] \quad (\text{IV.22})$$

Cas de non singularité.

Le cas $\varepsilon_1 = -1$ avec $\varepsilon_2 = +1$ ou $\varepsilon_2 = -1$ ne correspond pas à un cas de singularité. L'évaluation de la double intégrale dans ce cas, est une application de la double quadrature de Gauss. Nous poserons alors :

$$\Upsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(g^{(1)}(\eta_1(u_1, v_1), \eta_2(u_2, v_2)), g^{(2)}(\xi_1(u_2, v_2), \xi_2(u_2, v_2))) \quad (\text{IV.23})$$

$$\begin{aligned} I(E_1, E_2) &= \int_{\Delta_e^{(1)}} \int_{\Delta_e^{(2)}} \Psi(g^{(1)}(\boldsymbol{\eta}), g^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{+1}^{+2} \int_{-1}^{+1} \Upsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) J_{\eta\xi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) du_1 du_2 dv_1 dv_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Cas de singularité.

Le cas $\varepsilon_1 = +1$ avec $\varepsilon_2 = +1$ ou $\varepsilon_2 = -1$ est un cas de singularité, il se réduit à :

◇ $v_1 = 0$ et $-1 \leq u_1 \leq +1$: représenté par le triangle $\varepsilon_1 = +1$

◇ $v_2 = 0$ et $-1 \leq u_2 \leq +1$: représenté par les triangles $\varepsilon_2 = +1$ et $\varepsilon_2 = -1$

Considérons en dernier lieu le plan (v_1, v_2) comportant le point singulier $M_s(v_1 = 0, v_2 = 0)$. La subdivision de l'élément Δ_{M_s} en quatre triangles dont le sommet en commun n'est autre que $M_s(v_1 = 0, v_2 = 0)$ et l'introduction par la suite des coordonnées triangulaires (w_1, w_2) conduit

à la régularisation de l'intégrale (IV.10) en résorbant la singularité en $1/r$ de la fonction Ψ . Nous considérons que la variable singulière est, dans tous les cas de figure w_1 . Le jacobien de chacune des transformations est alors considéré et nous évaluerons notre intégrale sur les quatre triangles définis comme suit :

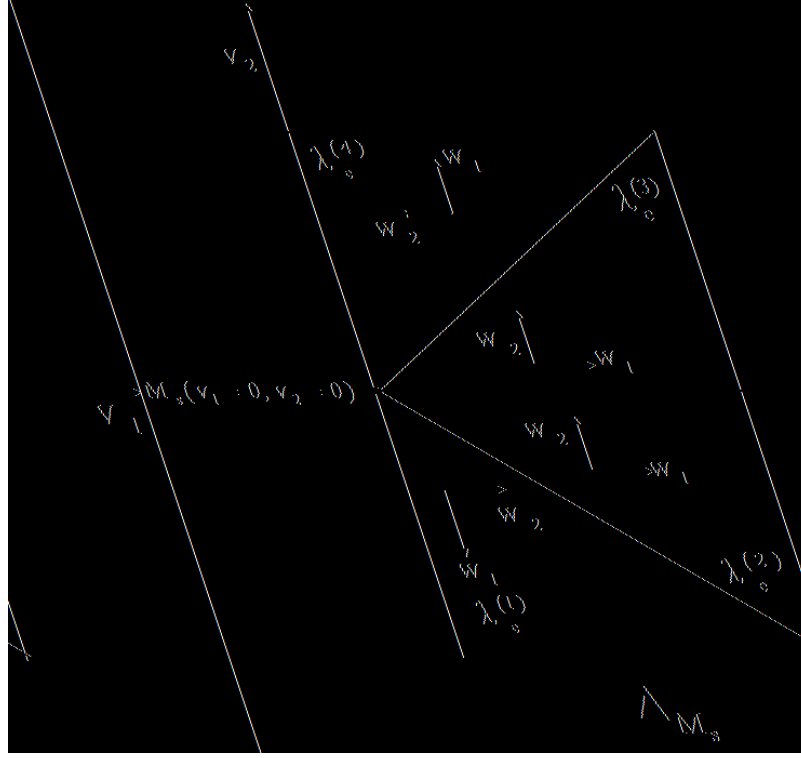


Figure IV.7 : Eléments adjacents par côté : subdivision de l'élément Δ_{M_s} en quatre triangles.

◇ Cas du triangle $\lambda_e^{(1)}$

$$\begin{cases} 0 \leq w_1 \leq 1 \\ 0 \leq w_2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = w_1 w_2 \\ v_2 = -w_1 \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

◇ Cas du triangle $\lambda_e^{(2)}$

$$\begin{cases} 0 \leq w_1 \leq 1 \\ -1 \leq w_2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_1 w_2 \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

◇ Cas du triangle $\lambda_e^{(3)}$

$$\begin{cases} 0 \leq w_1 \leq 1 \\ 0 \leq w_2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_1 w_2 \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

◇ Cas du triangle $\lambda_e^{(4)}$

$$\begin{cases} 0 \leq w_1 \leq 1 \\ -1 \leq w_2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = -w_1 w_2 \\ v_2 = w_1 \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

Dans chacun des cas nous écrivons :

$$dv_1 dv_2 = w_1 dw_1 dw_2$$

Le jacobien de la transformation est dans tous les cas $J_v(\mathbf{w}) = w_1$. Finalement, en tenant compte de tous les changements de variables considérés, nous écrivons alors que l'expression (IV.9), dans ce cas se transforme en :

$$\begin{aligned} I(E_1, E_2) &= \int_{\Delta_e^{(1)}} \int_{\Delta_e^{(2)}} \Psi(g^{(1)}(\boldsymbol{\eta}), g^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \\ &= \sum_{i=1}^{i=4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{\lambda_e^{(i)}} \Upsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}(w_1, w_2)) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) J_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}} J_v(\mathbf{w}) du_1 du_2 dw_1 dw_2 \quad (\text{IV.29}) \end{aligned}$$

D'autre part, exprimons la distance euclidienne \mathbf{r} entre les deux points d'intégration *extérieur* \mathbf{x} et *intérieur* \mathbf{y} de façon à isoler l'expression de la singularité. Nous nous proposons ainsi d'effectuer pour chacun des points d'intégration un développement limité en série de Taylor d'ordre 1 au voisinage du point singulier $M_s(v_1 = 0, v_2 = 0)$.

On désigne par $N_c(\boldsymbol{\eta})$ et $N_d(\boldsymbol{\xi})$ les fonctions d'interpolation usuelles définies sur chacun des deux éléments d'intégration et par \mathbf{x}_1^c et \mathbf{y}_1^d les valeurs des points \mathbf{x} et \mathbf{y} prises aux noeuds des deux éléments finis réels E_1 et E_2 .

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_c N_c(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x}_1^c = \sum_c N_c(\eta_1, \eta_2) \mathbf{x}_1^c \\ \mathbf{y} &= \sum_d N_d(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}_1^d = \sum_d N_d(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}_1^d \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Le développement en série de Taylor d'ordre 1 pour le point d'intégration \mathbf{x} nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_c N_c(+1, u_2) \mathbf{x}_1^c + \sum_c \left\{ \frac{\partial N_c}{\partial \eta_1} (+1, u_2) \frac{\partial \eta_1}{\partial v_1} (v_1 = 0) v_1 \right\} \mathbf{x}_1^c \\ &\quad + \sum_c \left\{ \frac{\partial N_c}{\partial \eta_2} (+1, u_2) \frac{\partial \eta_2}{\partial v_2} (v_2 = 0) v_2 \right\} \mathbf{x}_1^c + O(|v|) \quad (\text{IV.31}) \end{aligned}$$

D'après (IV.19), nous avons :

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial v_1} = (\varepsilon_1 u_1 - 1) \quad (\text{IV.32})$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial v_2} = (\varepsilon_2 u_2 - 1) \quad (\text{IV.33})$$

D'autre part, nous posons :

$$\sum_c \frac{\partial N_c}{\partial \eta_1} (+1, u_2) = \hbar_1^{E_2} (+1, u_2) \quad (\text{IV.34})$$

$$\sum_c \frac{\partial N_c}{\partial \eta_2} (+1, u_2) = \hbar_2^{E_2} (+1, u_2) \quad (\text{IV.35})$$

Nous procéderons identiquement pour le point d'intégration \mathbf{y} , en exprimant le développement limité en série de Taylor d'ordre 1 de l'expression de \mathbf{y} au voisinage de $M_s(v_1 = 0, v_2 = 0)$, nous écrivons alors que :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \sum_d N_d(-1, u_2) \mathbf{y}_1^d + \sum_d \left\{ \frac{\partial N_d}{\partial \xi_1}(-1, u_2) \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1}(v_1 = 0) v_1 \right\} \mathbf{y}_1^d \\ + \sum_d \left\{ \frac{\partial N_d}{\partial \xi_2}(-1, u_2) \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2}(v_2 = 0) v_2 \right\} \mathbf{y}_1^d + O(|v|) \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

et que

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} = (\varepsilon_1 u_1 + 1) \quad (\text{IV.37})$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} = (\varepsilon_2 u_2 + 1) \quad (\text{IV.38})$$

finalemt nous avons :

$$\sum_d \frac{\partial N_d}{\partial \xi_1}(-1, u_2) = \hbar_1^{E_1}(-1, u_2) \quad (\text{IV.39})$$

$$\sum_d \frac{\partial N_d}{\partial \xi_2}(-1, u_2) = \hbar_2^{E_1}(-1, u_2) \quad (\text{IV.40})$$

CONFORMITÉ DU RACCORD ENTRE LES ÉLÉMENTS E_1 , E_2 .

L'intersection des supports E_1 et E_2 n'étant pas vide, il existe un ensemble de points \mathcal{D}_i , tels que $E_1 \cap E_2 = \mathcal{D}_i$. Nous déduisons alors que pour tout point appartenant à \mathcal{D}_i , nous avons $v_1 = 0$ et $\varepsilon_1 = 1$. Nous écrivons les relations de conformité du raccord entre les éléments E_1 et E_2 comme suit:

$$\begin{aligned} \sum_d N_d(-1, u_2) \mathbf{y}_1^d &= \sum_c N_c(+1, u_2) \mathbf{x}_1^c \\ \hbar_2^{E_2} (+1, u_2) &= \hbar_2^{E_1} (-1, u_2) = \hbar_2(u_2) \end{aligned}$$

La dernière égalité nous permet de réécrire l'expression de \mathbf{r} comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = v_1 \left\{ (u_1 + 1) \hbar_1^{E_1}(-1, u_2) - (u_1 - 1) \hbar_1^{E_2}(+1, u_2) \right\} \\ + v_2 \left\{ (\varepsilon_2 u_2 + 1) \hbar_2^{E_1}(-1, u_2) - (\varepsilon_2 u_2 - 1) \hbar_2^{E_2}(+1, u_2) \right\} + O(|v|) \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

En posant que :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}(u_1, u_2) = \left\{ (u_1 + 1)\hbar_1^{E_1}(-1, u_2) - (u_1 - 1)\hbar_1^{E_2}(+1, u_2) \right\} \\ \mathfrak{S}(u_2) = \left\{ (\varepsilon_2 u_2 + 1)\hbar_2^{E_1}(-1, u_2) - (\varepsilon_2 u_2 - 1)\hbar_2^{E_2}(+1, u_2) \right\} \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

L'expression de (IV.41) se réduit à :

$$\mathbf{r} = v_1 \mathfrak{S}(u_1, u_2) + v_2 \mathfrak{S}(u_2) + O(|v|) \quad (\text{IV.43})$$

et en tenant compte des changements de variables triangulaires (w_1, w_2) , nous réécrivons la relation précédente comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= w_1 F(u_2, w_2) + O(w_1) \\ &= J_v(\mathbf{w}) F(u_2, w_2) + O(w_1) \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

en remplaçant la dernière expression dans (IV.29), la singularité du noyau faiblement singulier de l'intégrale *intérieure* est résorbée. Ce schéma analytique respecte parfaitement la symétrie de l'intégration double et ne privilégie *a priori* aucune des deux sommations. La même démarche a été étendue aux cas singuliers de deux éléments *adjacents par coin* et *coïncidents*.

INTÉGRATION SUR DEUX ÉLÉMENTS ADJACENTS PAR COIN.

Nous considérons deux éléments présentant un coin en commun. La singularité est confinée au coin en commun et a lieu lorsque les deux points d'intégration *extérieur* \mathbf{x} et *intérieur* \mathbf{y} parcourent simultanément ce même coin. Dans la cas considéré représenté par la figure (IV.4.5) la singularité a lieu quand $\xi_1 = \xi_2 = -1$ et $\eta_1 = \eta_2 = +1$. La même démarche que précédemment peut être développée. Le passage en coordonnées triangulaires se fait après avoir subdivisé Δ_{M_s} en deux triangles $\lambda_e^{(1)}$ et $\lambda_e^{(2)}$.

INTÉGRATION SUR DEUX ÉLÉMENTS COÏNCIDENTS.

Dans cette section, nous décrivons le cas de deux éléments coïncidents, correspondant à $E_e \equiv E_1 \equiv E_2$, ce qui nous conduit à supposer que $g_e \equiv g^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) \equiv g^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$. Il est évident que l'intégrale I devient singulière pour $\eta_1 \equiv \xi_1$ et $\eta_2 \equiv \xi_2$. Nous considérons alors chacun des plans représentatifs des coordonnées (η_1, ξ_1) et (η_2, ξ_2) . Introduisons alors les transformations suivantes:

$$\begin{cases} \eta_\alpha = u_\alpha + v_\alpha(\varepsilon_\alpha u_\alpha - 1) \\ \xi_\alpha = u_\alpha + v_\alpha(\varepsilon_\alpha u_\alpha + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2 \\ \varepsilon_\alpha = -1, 1 \end{cases} \quad (\text{IV.45})$$

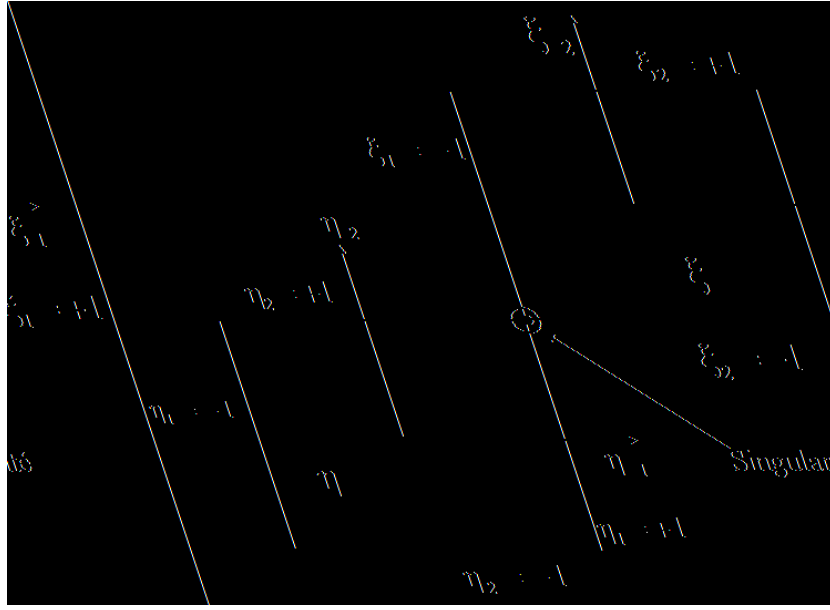


Figure IV.8 : Intégration sur deux éléments adjacents par coin.

avec

$$\begin{aligned} -1 \leq u_1 \leq 1 & \quad \text{et} \quad -1 \leq v_1 \leq 1 \\ -1 \leq u_2 \leq 1 & \quad \text{et} \quad -1 \leq v_2 \leq 1 \end{aligned}$$

où le paramètre ε_i joue le même rôle que celui défini précédemment. Nous déduisons que les cas singuliers correspondent à $\varepsilon_\alpha = -1, 1$ avec $\alpha = 1, 2$. Dans ce cas bien précis la subdivision de Δ_{M_s} se fait en huit triangles avec les changements de variables qui correspondent.

IV.4.6 Evaluation numérique des intégrales

Le développement de tels schémas d'intégration se justifie pleinement pour l'évaluation des intégrales doubles singulières, étant donné qu'ils concrétisent les aspects avantageux de symétrie et de régularisation des formulations intégrales variationnelles. L'évaluation de ces dernières devient alors une application de la méthode des points de Gauss. Nous ne ferons pas de distinction entre les deux sommations (extérieure et intérieure), le schéma d'intégration s'y prêtant naturellement. Par simple rappel, nous écrivons que d'une manière générale la double intégrale donnée par (IV.9) est évaluée sur deux éléments de référence $\Delta_e^{(1)}$ et $\Delta_e^{(2)}$. Ceux-ci étant respectivement décrits par les paramétrages $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\xi}$. En appliquant les différents changements de variables ainsi décrits, nous pouvons approximer la double intégrale singulière dans les cas adjacents par côté et par coin en appliquant la règle d'intégration par points de Gauss de la

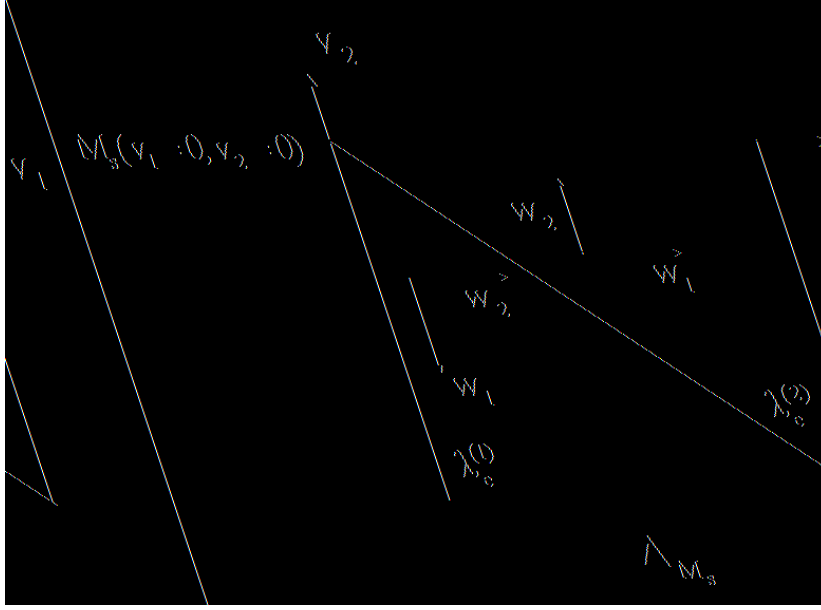


Figure IV.9 : Eléments adjacents par coin : Subdivision en deux triangles.

manière suivante :

$$I(E_1, E_2) \simeq I^{(1)} + I^{(2)} \quad (\text{IV.46})$$

$$I^{(1)} = \sum_{i=1}^{Npg} \sum_{j=1}^{Npg} A_{\mathbf{u}}^i A_{\mathbf{v}}^j \bar{\Psi}_1(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) J_{\eta\xi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{IV.47})$$

$$I^{(2)} = \sum_{t=1}^{NBT} \sum_{i=1}^{Npg} \sum_{j=1}^{Npg} A_{\mathbf{u}}^i A_{\mathbf{w}}^j \bar{\Psi}_1(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) J_{\eta\xi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) J_v(\mathbf{w}) \quad (\text{IV.48})$$

NBT désigne le nombre de triangles qui résultent des transformations présentées en (IV.4.5). Celui-ci est pris égal à 2 ou 4 selon qu'il s'agisse d'une double intégration respectivement, sur deux éléments adjacents par coin ou par côté. Dans le cas où l'on a à considérer l'intégration singulière sur deux éléments *coïncidents*, l'expression donnée en (IV.46) reste valable et sera réduite à :

$$I(E_1, E_2) \simeq I^{(2)} \quad (\text{IV.49})$$

en procédant à une sommation sur huit triangles, donc nous posons NBT=8.

IV.5 Construction matricielle

La structure étant composée de N_e éléments de frontière réduits à des quadrilatères à 8 noeuds, nous avons procédé à la construction des différentes matrices \mathbf{B}_{tt} , \mathbf{B}_{uu} , \mathbf{B}_{tu} découlant

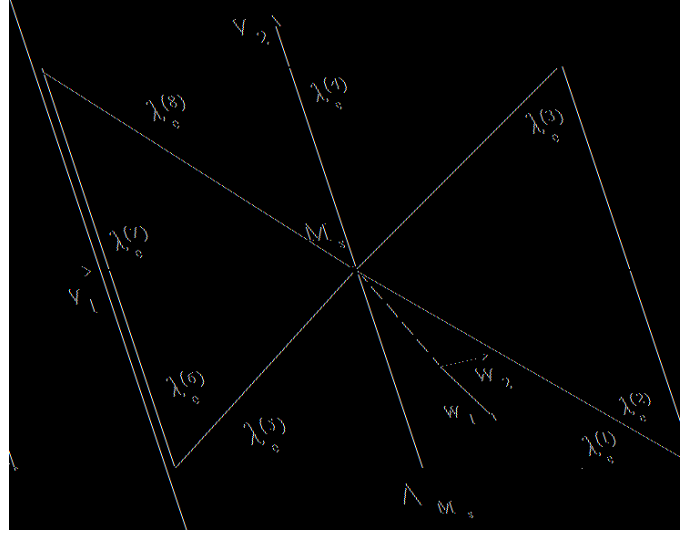


Figure IV.10 : Éléments coïncidents : subdivision de l'élément Δ_{M_s} en huit triangles.

de la phase de discrétisation. Pour cela nous avons pris en considération le caractère symétrique de \mathbf{B}_{tt} , \mathbf{B}_{uu} lors de l'évaluation des différentes doubles intégrales. Pour la construction des matrices \mathbf{B}_{tu} et \mathbf{B}_{ut} , seuls les termes de la matrice \mathbf{B}_{tu} ont été évalués lors de cette phase d'intégration, sa transposée \mathbf{B}_{ut} a été construite en dehors de cette phase, étant donné que l'une de nos préoccupations majeures demeure la minimisation de la phase d'intégration. Le fonctionnement global de l'algorithme décrivant l'évaluation des doubles intégrales et la construction des différentes matrices est le suivant :

- ◇ Boucle sur les éléments *extérieurs* $E(\mathbf{x})$
 - Boucle sur les éléments *intérieurs* $E(\mathbf{y})$
 - * si $E(\mathbf{x})$ et $E(\mathbf{y})$ sont confondus :
 - Evaluation de la matrice élémentaire correspondante.
 - * si $E(\mathbf{x})$ et $E(\mathbf{y})$ sont adjacents par côté :
 - Evaluation de la matrice élémentaire correspondante
 - * si $E(\mathbf{x})$ et $E(\mathbf{y})$ sont adjacents par coin :
 - Evaluation de la matrice élémentaire correspondante
 - * si $E(\mathbf{x})$ et $E(\mathbf{y})$ sont disjoints :
 - Evaluation de la matrice élémentaire correspondante
- Assemblage des matrices élémentaires dans \mathbf{B}_{tt} , \mathbf{B}_{uu} , \mathbf{B}_{tu}*

- Fin de boucle sur les éléments *intérieurs* $E(\mathbf{y})$
- ◊ Fin de boucle sur les éléments *extérieurs* $E(\mathbf{x})$

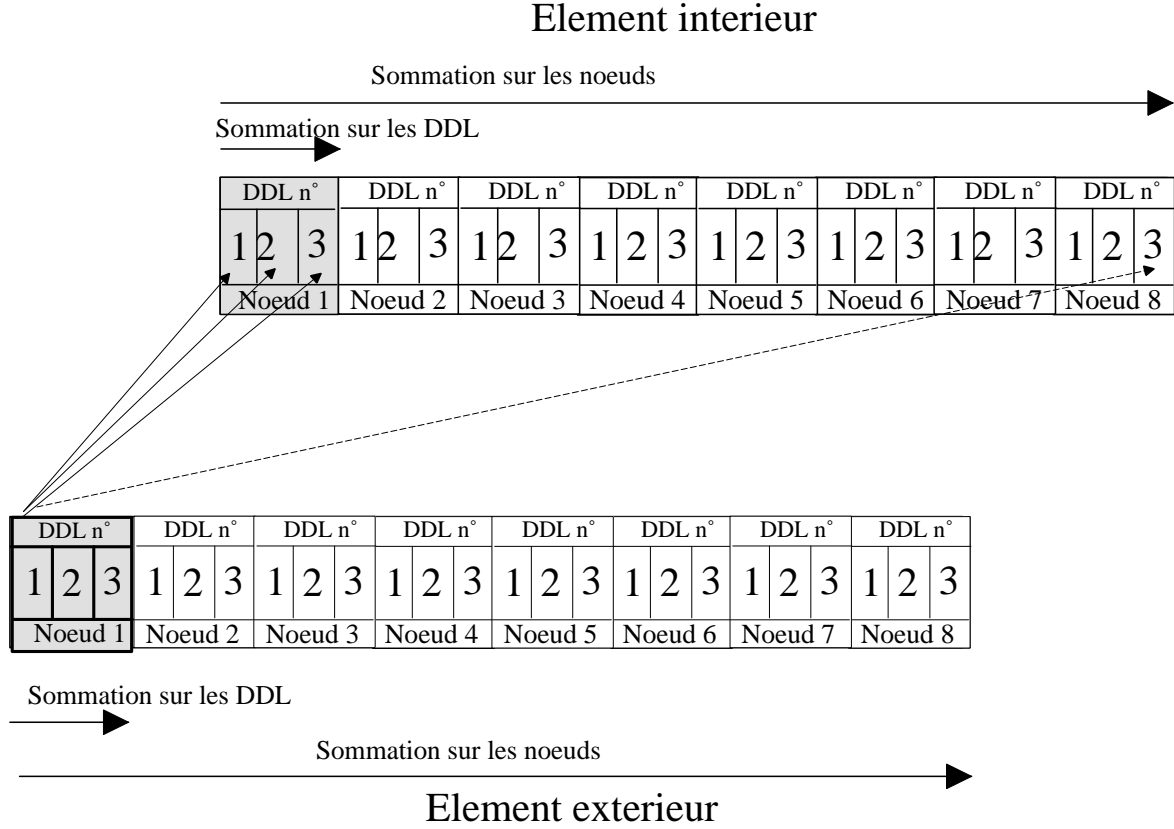


Figure IV.11 : Construction d'une identité matricielle pour une double intégration.

Au stade de la construction des matrices \mathbf{B}_{tt} , \mathbf{B}_{uu} , \mathbf{B}_{tu} , il est nécessaire de connaître l'emplacement de chaque degré de liberté en déplacement et en tension dans les vecteurs correspondants. A cet effet, le sous programme EINDDL est appelé une seule fois avant de commencer les boucles d'intégrations. Il enregistre respectivement dans les matrices IDU et IDT ces emplacements. Pour chaque paire d'éléments d'intégration *extérieur* et *intérieur* fixée, nous construisons la matrice élémentaire qui correspond. Cette étape peut se résumer à l'algorithme descriptif qui va suivre :

- ◊ Boucle sur les noeuds $n(\mathbf{x})$ de l'élément *extérieur* $E(\mathbf{x})$
 - Boucle sur les trois directions donnant les ddl extérieurs
 - * Boucle sur les noeuds $n(\mathbf{y})$ de l'élément *intérieur* $E(\mathbf{y})$

- Boucle sur les trois directions donnant les ddl *intérieurs*
 - Construction de la matrice élémentaire correspondant à une double intégration
- Fin de boucle sur les trois directions donnant les ddl *intérieurs*
- * Fin de boucle sur les noeuds *intérieurs* $n(\mathbf{y})$
- Fin de boucle les trois directions donnant les ddl *extérieurs*
- ◇ Fin de boucle sur les noeuds *extérieurs* $n(\mathbf{x})$

IV.6 Optimisation de la phase d'intégration

L'évaluation des doubles intégrations régulières, décrite en section (IV.4.3), s'effectue par application directe de la double quadrature de Gauss. Le nombre de points de Gauss mis en jeu est déterminant pour la qualité des résultats et la durée de la phase d'intégration. Tout le problème est donc de parvenir à *ajuster* le nombre de points d'intégration pour optimiser le rapport *précision des résultats/temps d'intégration*. Ce nombre varie, entre autre, en fonction des distances relatives séparant les deux éléments d'intégration *extérieur* et *intérieur*. Ce dernier point est une caractéristique des méthodes des équations intégrales qui présentent des noyaux d'intégration en r^{-1} , r^{-2} et même r^{-3} . En effet, la présence de ces noyaux entraîne des variations très fortes dans les intégrands sur les deux éléments d'intégration si ces derniers deviennent très proches, un nombre assez élevé de points d'intégration est de ce fait recommandé pour obtenir une précision satisfaisante. Le contraire reste vrai si les deux éléments sur lesquels on effectue notre double intégration, sont assez éloignés l'un de l'autre. Il est donc peu astucieux de procéder au calcul de l'ensemble des doubles intégrales avec le même nombre de points de Gauss et le recours à une *procédure d'optimisation* de la phase d'intégration est une étape incontournable dans notre travail.

CRITÈRE D'INDICATEUR DE SÉVÉRITÉ.

Notre algorithme de choix du nombre de points de Gauss est basé sur l'utilisation du critère d'*indicateur de sévérité* avancé par [61]. Ce critère s'appuie sur une approche *empirique* qui consiste à évaluer un paramètre \mathcal{IS} défini comme suit :

$$\mathcal{IS} = (2.37 + 0.424 \cos \theta) D/d \quad (\text{IV.50})$$

Ce critère initialement avancé dans l'approche par collocations a été adapté à l'intégration double qui caractérise les formulations intégrales variationnelles de Galerkin. D est la plus grande dimension de l'élément d'intégration considéré. $d = \|\mathbf{c}_e - \mathbf{c}_i\|$ est définie comme étant la distance séparant les deux centres de gravité des deux éléments d'intégration. et θ est l'angle

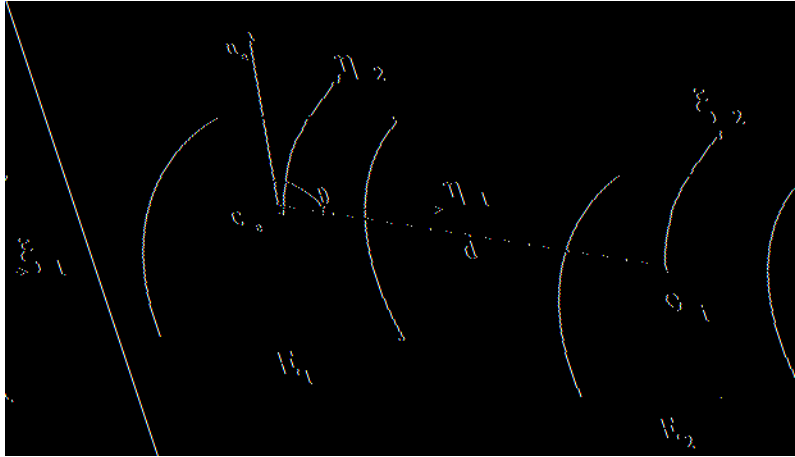


Figure IV.12 : Crière d'indicateur de sévérité : description géométrique.

entre $(\mathbf{c}_e - \mathbf{c}_i)$ et \mathbf{n}_e et est choisi tel que $\cos \theta > 0$. Dans sa généralité, et suivant les valeurs prises par \mathcal{IS} , le critère conduit à subdiviser ou non chacun des éléments mis en jeu en γ_e sous-éléments avec un nombre de points de Gauss λ_i . En pratique, pour des structures peu élancées, la majorité de nos doubles intégrations régulières se font avec un nombre modéré de points de Gauss, (2×2) par élément d'intégration ou rarement (3×3) points de Gauss et ceci pour une précision numérique assez satisfaisante. Ce critère reste d'application facile et assez générale et notablement plus simple à mettre en oeuvre que le critère de Stroud et Secrest évoqué précédemment.

	Points de Gauss par élément
\mathcal{IS}	quadrilatères à 8 noeuds
1	$2 \times 2 = 4$
2	$3 \times 3 = 9$
3	$4 \times 4 = 16$
4	$5 \times 5 = 25$
5	$6 \times 4 = 36$
6	$4 \times (4 \times 4) = 64$
7	$4 \times (5 \times 5) = 100$
8	$4 \times (6 \times 6) = 144$

Tableau IV.1: Critère d'indicateur de sévérité : nombre de points de Gauss par élément.

IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre l'ensemble des algorithmes qui mènent à la construction de la matrice de rigidité du super - élément intégral ont été présentés. Nous avons, entre autre, détaillé l'ensemble des schémas d'évaluation des intégrales doubles surfaciques développés dans ce travail. Nous avons attaché une attention bien particulière à la présentation d'un schéma rigoureux pour le traitement des doubles intégrales dans le cas d'une singularité. Ce dernier a la particularité de préserver et de respecter la symétrie des formulations intégrales variationnelles symétriques de Galerkin. La phase des intégrations et de la construction matricielle s'est effectuée en associant la symétrie des méthodes intégrales symétriques de Galerkin, ce qui a permis une réduction substantielle des temps CPU propres à chacune de ces étapes. L'optimisation de la phase de l'évaluation des intégrales doubles dans le cas où les deux éléments sont disjoints, s'est faite en ayant recours au critère d'optimisation d'indicateur de sévérité. La matrice de rigidité du super-élément a été implantée dans *CAST3M*. L'ensemble des résultats des différents tests numériques effectués feront l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre V

Validations numériques

V.1 Introduction

Nous disposons désormais d'un super-élément intégral opérationnel dans le code aux éléments finis CAST3M. Il convient de le valider avant d'envisager de l'utiliser sur toute structure réelle. L'objectif principal de ce chapitre est de vérifier, sur des problèmes pour lesquels on dispose de solutions analytiques, que l'outil numérique ainsi mis au point est fiable. Nous nous proposons donc de vérifier le bon fonctionnement des deux procédures numériques calculant la matrice de rigidité du super élément intégral :

- ◇ l'une utilisant l'approche par collocations,
- ◇ l'autre utilisant l'approche variationnelle de Galerkin.

Une grande partie de nos validations sera consacrée à la vérification du bon fonctionnement du nouveau schéma d'intégration symétrique développé en section (IV.4.5) et introduit pour la première fois dans le cadre de ce travail, ainsi qu'à l'étude de ses performances en termes de *précision de résultats* et en *temps d'intégration*. Nous nous proposons donc de traiter les trois exemples numériques suivants :

- ◇ Sphère sous pression externe uniforme.
- ◇ Cavité sphérique en milieu infini , soumise à une pression interne uniforme.
- ◇ Cylindre sous pression interne uniforme.

V.2 Sphère sous une pression externe uniforme

Le premier exemple traite d'un problème intérieur. Le super élément discrétisé par éléments de frontière est l'enveloppe d'une sphère de rayon $a=1\text{mm}$. Ce maillage, modélisé par 24 quadrilatères isoparamétriques à 8 noeuds, constitue l'interface *éléments finis -éléments de frontière*.

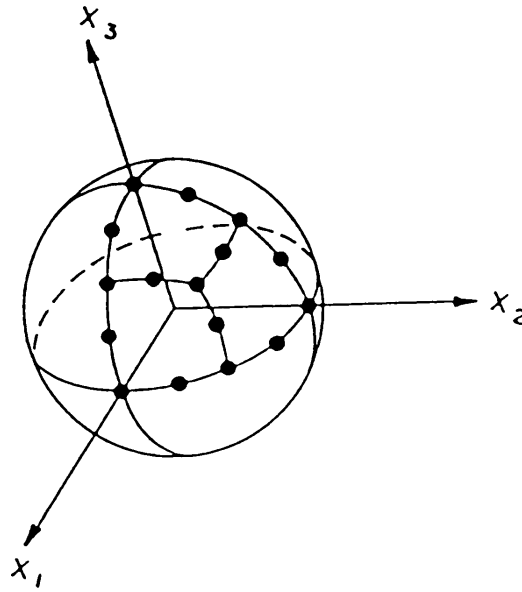


Figure V.1 : Maillage de surface.

Cette sphère est entourée d'une couche d'éléments finis dont la surface externe est soumise à une pression isotrope. Les constantes élastiques du matériau supposé élastique et isotrope constituant la sphère sont données par $E = 1300 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$. L'analyse des erreurs relatives sur les déplacements radiaux u_r de la zone éléments de frontière donne une valeur maximale de $e_e = 0.0325\%$. Ce résultat reste tout à fait satisfaisant compte tenu du maillage de surface à 74 noeuds, considéré comme relativement grossier.

V.3 Cavité sphérique en milieu infini

Le deuxième exemple de validation numérique traite de l'étude d'une cavité sphérique sous pression interne, incluse dans un milieu infini élastoplastique. Cet exemple est considéré comme un cas test parfait car en plus de la solution analytique dont il dispose, la discrétisation par éléments finis de la zone où évoluent les linéarités et par éléments de frontière le domaine infini, sans avoir recours à une troncature artificielle, est tout à fait recommandée. A travers cet exemple, le couplage entre éléments finis et équations intégrales trouve toute son utilité.

V.3.1 Description de l'étude

On considère une cavité sphérique de rayon $a = 1mm$, dans un milieu infini élastoplastique. Le matériau est élastoplastique avec écrouissage isotrope ayant pour critère de plasticité celui de Von Mises et dont les caractéristiques sont les suivantes : module d'Young $E = 1300MPa$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ ainsi qu'une limite élastique $\sigma_e = 1MPa$.

On désigne par $u(r)$ le déplacement plastique radial dans la cavité sphérique et par $e^p(r)$ les déformations plastiques cumulées. Partant de l'état naturel, on soumet cette cavité sphérique à une pression intérieure uniforme $p(t)$ que l'on fait croître dans le temps. Celle-ci donnée sous forme suivante :

$$p(t) = p_e(1 + \lambda(t)) \quad (V.1)$$

Le chargement $p(t)$ est donc donné en fonction de la pression limite p_e , et d'un paramètre de chargement adimensionnel $\lambda(t)$. p_e désigne la pression limite pour laquelle le premier point plastique apparaît en $r = a$, elle est donnée par :

$$p_e = \frac{2}{3}\sigma_e$$

Grâce à la symétrie sphérique, cet exemple est essentiellement unidimensionnel. Les seules variables non nulles à considérer dépendent uniquement des coordonnées radiales r et sont u_r , ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi}$, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$.

La surface seuil de plasticité suivant le critère de Von Mises est donnée par :

$$\|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\| - (\sigma_e + H(\bar{e}^p)) \leq 0 \quad (V.2)$$

Avec $H(\bar{e}^p)$ défini comme étant le module d'écrouissage isotrope et \bar{e}^p désignant les déformations plastiques cumulées. Nous pouvons reformuler les expressions de σ_e et de $H(\bar{e}^p)$ en fonction des paramètres du matériau k_0 , k_1 et m de manière à écrire que :

$$\sigma_e = 2Gk_0 \quad (V.3)$$

$$H(\bar{e}^p) = 2Gk_1(\bar{e}^p)^m \quad (V.4)$$

◇ $m = 1$ car on est en présence d'un écrouissage linéaire.

◇ Le paramètre $k_1 = 0$ s'il n'y a pas d'écrouissage.

Désignons par b , le rayon de la zone plastifiée. La valeur de b est une fonction de la pression appliquée, l'expression reliant b à $\lambda(t)$ est la suivante :

$$3\zeta \ln(b/a)^3 + 2k_1 [(b/a)^3 - 1] = \lambda[3\zeta + 2k_1] \quad (V.5)$$

avec

$$\zeta = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \quad (\text{V.6})$$

Les solutions en déplacements et en déformations plastiques cumulées dans la zone plastifiée sont données par les solutions analytiques suivantes [21]:

EN ÉLASTICITÉ

$$u(r) = \frac{a^3}{r^2} \frac{(1 + \nu)}{2E} p \quad (\text{V.7})$$

EN PLASTICITÉ.

$$u(r) = A r + \frac{a^3}{r^2} B + C r \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (\text{V.8})$$

$$\bar{e}^p(r) = \frac{2k_0}{3\zeta + 2k_1} \left[\frac{b^3}{r^3} - 1 \right] \quad (\text{V.9})$$

Sachant que

$$C = \frac{3(1 - \zeta)}{3\zeta + 2k_1} k_0 \quad (\text{V.10})$$

$$B = \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} \left[\frac{3 + 2k_1}{3\zeta + 2k_1} \right] k_0 \quad (\text{V.11})$$

$$A = -\frac{C}{3} \left[1 + \ln\left(\frac{b^3}{a^3}\right) \right] \quad (\text{V.12})$$

V.3.2 Etude numérique

Le modèle envisagé est très grossier et est composé de 24 éléments de frontière de type quadrilatère à 8 noeuds pour la surface du super-élément construit par équations intégrales de frontière et qui représente la surface interne du domaine élastique infini et de 48 éléments finis de type cubique à 20 noeuds pour la zone pouvant plastifier. Cette zone discrétisée par éléments finis présente un rayon extérieur $R=2$. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à la réponse élastique en déplacement dont les valeurs ont été confrontées aux solutions analytiques correspondantes données par (V.7). Nous avons constaté que l'erreur n'excède pas (0.23%) avec la méthode variationnelle de Galerkin.

Dans notre analyse élastoplastique nous avons évalué les déplacements plastiques et les déformations plastiques cumulées que nous avons comparés aux solutions analytiques (V.8) et

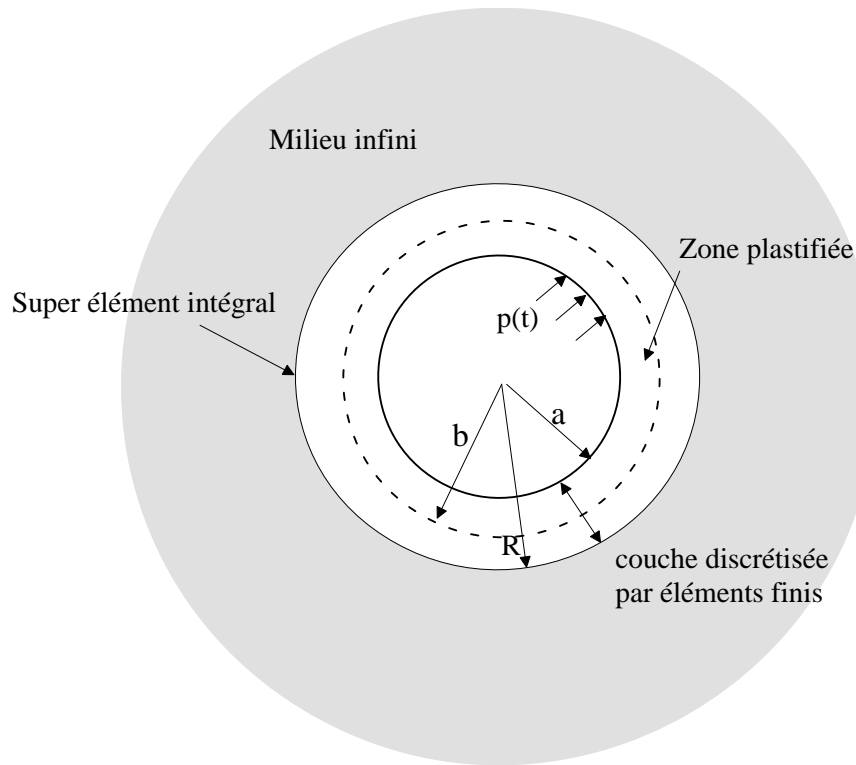


Figure V.2 : Cavité élastoplastique en milieu infini

(V.9). Les résultats restent encourageants compte tenu de la discrétisation très grossière adoptée. Nous avons représenté sur les figures (V.3)–(V.8) les déplacements plastiques et les déformations plastiques cumulées pour différents paramètres de chargements $\lambda(t) = 1.21$, $\lambda(t) = 1.78$ et $\lambda(t) = 2.1$. Ce qui revient à considérer les différents rayons de plastification correspondants : $b/a = 1.5$, $b/a = 1.75$, $b/a = 2$. Le cas où toute la zone modélisée par éléments finis est plastifiée ($b = R = 2$) est un cas critique et le modèle avec 48 éléments finis devient insuffisant.

V.3.3 Conclusions et commentaires

Les exemples de validation du super-élément sur des structures sphériques donnent des résultats tout à fait précis selon les deux approches, collocations et variationnelle de Galerkin. Les résultats propres à la méthode variationnelle sont obtenus en adoptant deux cas :

- ◊ Dans le premier cas, les intégrations singulières correspondant aux cas de deux éléments coïncidents sont évaluées en ayant recours au schéma d'intégration singulière non symétrique présenté en section (IV.4.4). Rappelons que dans ce cas, lorsque l'on traite de deux éléments adjacents par côté ou par coin, la singularité est complètement ignorée puisque

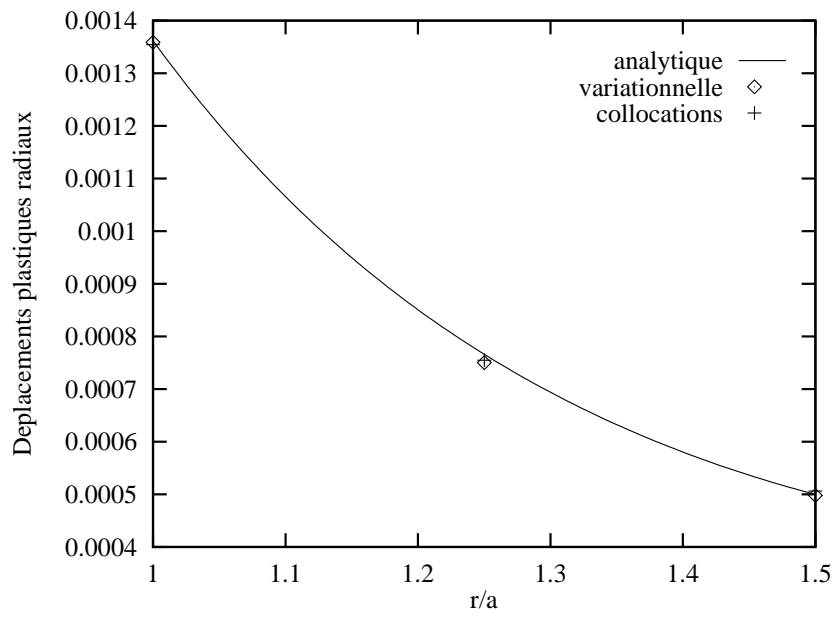


Figure V.3 : Déplacements plastiques radiaux pour $b/a=1.5$.

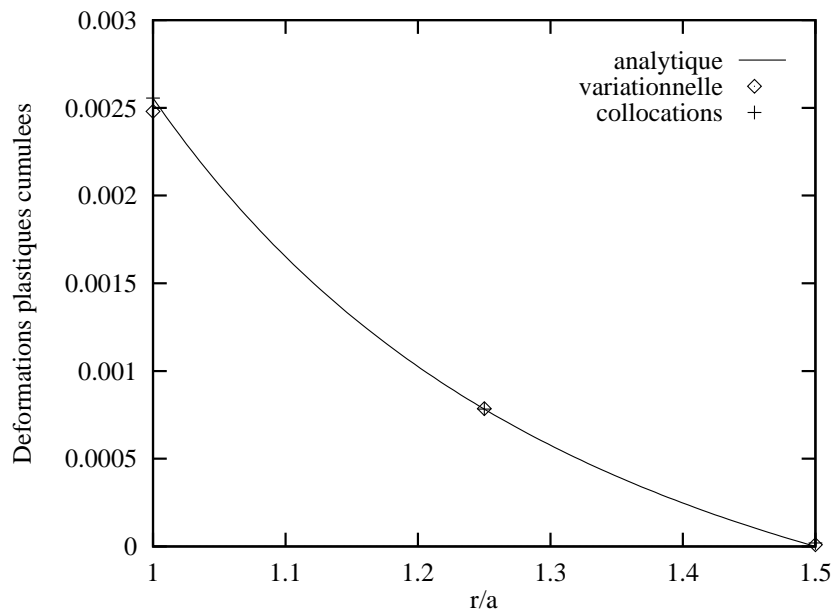
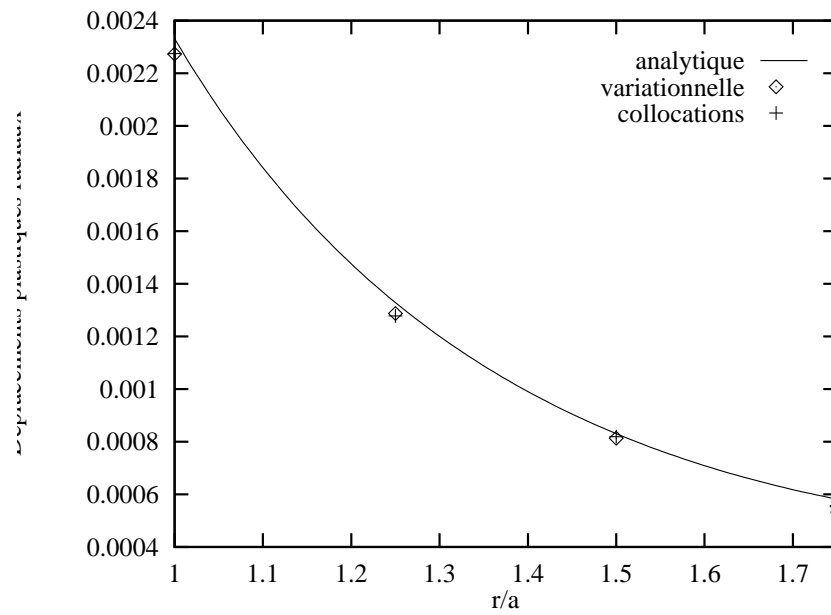
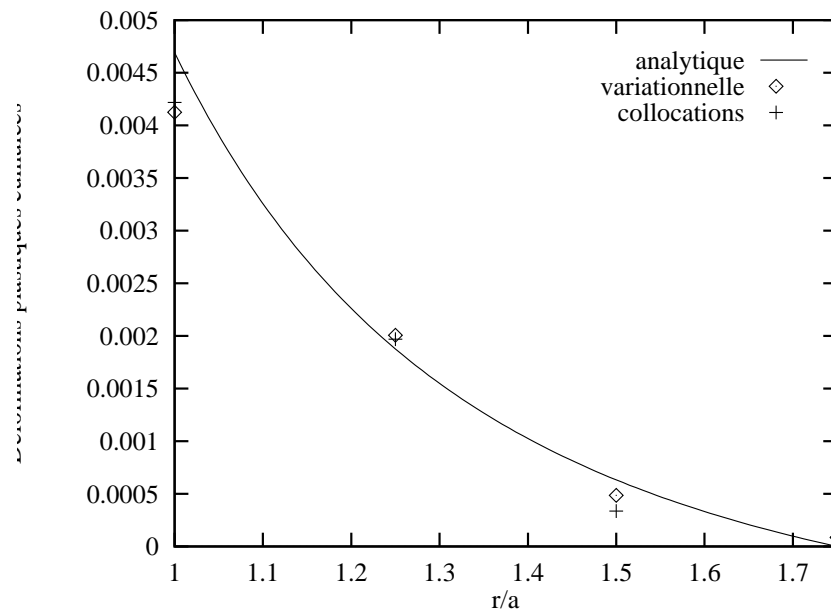
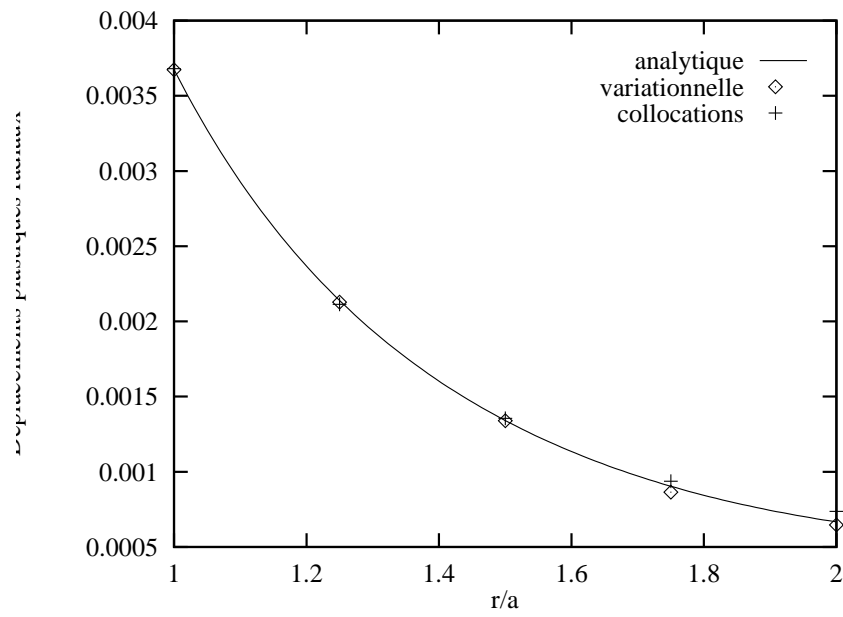
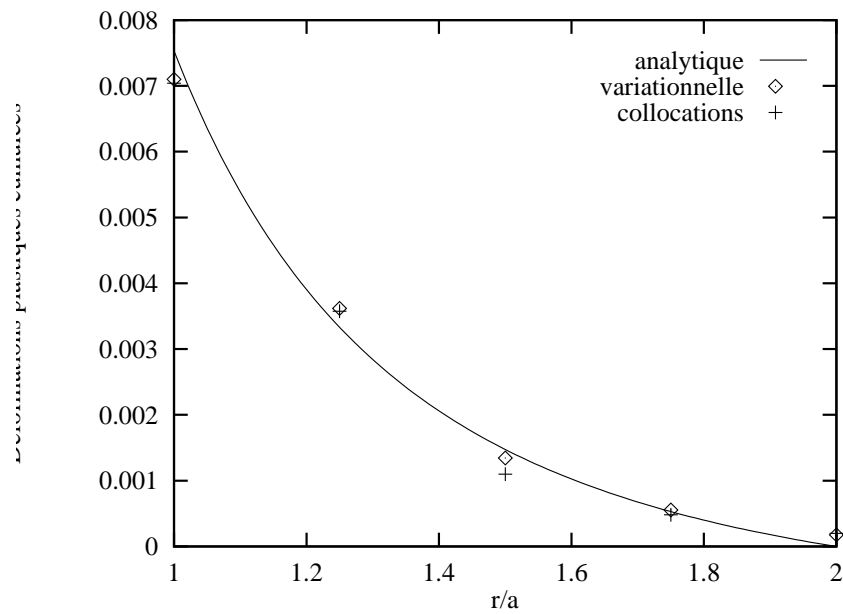


Figure V.4 : Déformations plastiques cumulées pour $b/a=1.5$.

Figure V.5 : Déplacements plastiques radiaux pour $b/a=1.75$.Figure V.6 : Déformations plastiques cumulées pour $b/a=1.75$.

Figure V.7 : Déplacements plastiques radiaux pour $b/a=2$.Figure V.8 : Déformations plastiques cumulées pour $b/a=2$.

nous évaluons la double intégrale par application directe de la quadrature de Gauss.

- ◊ Dans le second cas, le nouveau schéma d'intégration singulière symétrique de la section (IV.4.5) est celui que l'on adopte.

L'implantation de ce nouveau schéma sur de telles structures n'a pas apporté d'amélioration notable en termes de précision. Dans les deux cas cités précédemment les précisions sont très satisfaisantes et demeurent du même ordre. Ce que l'on ne constatera pas pour d'autres essais effectués sur d'autres géométries. La critique qu'on peut émettre sur une telle étude est que lorsqu'on traite de structures sphériques, les éléments les modélisant jouent exactement le même rôle compte tenu des symétries. D'ailleurs dans le maillage surfacique considéré, il n'apparaît que cinq noeuds de nature différente. D'autre part, les éléments quadrilatéraux sont les seuls à avoir été incorporés dans notre code et la génération automatique de maillages surfaciques par le mailleur de *CAST3M* incorpore des éléments triangulaires. Raffiner les maillages d'une structure sphérique dans *CAST3M* est une phase très laborieuse qui s'effectue à la main, si l'on désire incorporer uniquement des éléments quadrilatéraux. Nous nous sommes donc limités à des maillages dont le nombre d'éléments est restreint.

Il est clair qu'une idée précise sur l'apport du nouveau schéma symétrique ne peut être donnée par une telle analyse. Cette limitation justifie pleinement notre prochaine étude portant sur une structure cylindrique.

V.4 Cylindre sous pression interne uniforme

L'étude portant sur un cylindre creux soumis à une pression interne uniforme constitue un cas test d'un intérêt particulier. En plus de la solution analytique dont dispose ce problème, le cylindre est une structure qui présente des singularités de type *arêtes*. Dans ce genre d'études, il est nécessaire de procéder à un dédoublement des noeuds en tension, puisque le vecteur tension est une fonction linéaire de la normale et devient discontinu au passage de ces singularités géométriques. Le programme décrivant l'opérateur intégral variationnel tient compte de ces dédoublements de noeuds en tension alors que celui en collocations ne le fait pas dans l'état actuel. La génération de maillages paramétrés sur une structure telle que le cylindre est une chose facile par conséquent une étude systématique avec différents maillages, peut ainsi être menée.

V.4.1 Description de l'étude

La structure étudiée est un cylindre creux de rayon interne $r_1 = 1$, de hauteur $H = 2$, en déformations planes, et est soumis à une pression interne unitaire $P = 1$. Le rayon externe r_2

est une variable. Le matériau le constituant est élastique, isotrope de module d'Young $E = 1$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Les déplacements analytiques radiaux et élastiques sont données par :

$$u_r = \frac{P}{E} \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{(1 - \nu - \nu^2) r^2 + (1 + \nu) r_2^2}{r} \quad (\text{V.13})$$

V.4.2 Etude numérique

Le maillage est composé d'un cylindre interne discrétisé par éléments finis, sur lequel s'applique la pression P et d'un cylindre externe dont la surface est discrétisée par éléments de frontière. Le rayon de la surface cylindrique correspondant à l'interface entre les deux domaines est $r_i = 2$. Il faut bien noter que seul le quart du cylindre a été maillé. Différentes combinaisons sur les paramètres géométriques ont été adoptées et que nous résumons comme suit :

- ◊ Le rayon extérieur $r_2 \in \{3, 4, 5\}$
- ◊ Le nombre d'éléments de frontière dans la direction angulaire θ : $N_\theta \in \{2, 4, 6\}$
- ◊ Le nombre d'éléments de frontière dans la direction radiale r : $N_r \in \{2, 3, 4\}$

Gardons présent à l'esprit que le but de la cette étude est de tester l'efficacité du schéma d'intégration symétrique (IV.4.5) et de quantifier son apport en termes de précision et de temps d'intégration par rapport à l'ancien schéma non symétrique (IV.4.4). Nous avons défini différentes combinaisons entre les modes d'intégration suivants :

- ◊ Le mode *régulier* correspondant à l'application directe de la double quadrature de Gauss, que l'on rencontre dans le cas d'intégration sur deux éléments disjoints.
- ◊ Le mode *singulier1* correspondant à l'intégration singulière de type non-symétrique que l'on rencontre dans le cas de deux éléments confondus.
- ◊ Le mode *singulier2* correspondant à l'intégration singulière de type symétrique que l'on rencontre dans le cas de deux éléments confondus.
- ◊ Le mode *singulier3* correspondant à l'intégration singulière de type symétrique que l'on rencontre dans le cas de deux éléments adjacents par côté.
- ◊ Le mode *singulier4* correspondant à l'intégration singulière de type symétrique que l'on rencontre dans le cas de deux éléments adjacents par coin.

Plusieurs combinaisons entre ces modes d'intégration, synthétisées ci dessous, ont été testées.

Le mode 1 décrit le schéma non symétrique pur et le mode 4 décrit le schéma symétrique pur et correspondent aux cas extrêmes. Les modes 2 et 3 sont des cas intermédiaires puisqu'ils combinent entre les différentes intégrations symétriques ou non symétriques. Nous avons évalué les erreurs relatives maximales obtenues sur les déplacements radiaux des points du maillage de frontière, pour les différents paramètres de maillages précédemment décrits et pour les différents modes d'intégration résumés dans la table (V.1). Le cas $N_\theta = 2$ conduit à des résultats imprécis dans tous les cas de figure. Les résultats demeurent dans ce cas non significatifs étant donné que le maillage est extrêmement grossier.

Types d'intégration	Modes d'intégration			
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Eléments disjoints	<i>Régulier</i>	<i>Régulier</i>	<i>Régulier</i>	<i>Régulier</i>
Eléments adjacents par côté	<i>Régulier</i>	<i>Singulier3</i>	<i>Singulier3</i>	<i>Singulier3</i>
Eléments confondus	<i>Singulier1</i>	<i>Singulier1</i>	<i>Singulier2</i>	<i>Singulier 2</i>
Eléments adjacents par coin	<i>Régulier</i>	<i>Régulier</i>	<i>Régulier</i>	<i>Singulier4</i>

Tableau V.1: Combinaisons des différents modes d'intégration.

V.4.3 Conclusions et commentaires

L'utilisation du schéma d'intégration non symétrique, qui se traduit par l'application du mode 1 d'intégration, conduit dans la plupart des cas à de très importantes erreurs illustrées par la table (V.2). Ce point n'avait pas été observé dans le cadre de l'étude menée sur des structures sphériques avec le schéma d'intégration non symétrique. Le développement du nouveau schéma symétrique est donc pleinement justifié et constitue une étape nécessaire et indispensable dans l'implantation numérique de la méthode variationnelle de Galerkin. Dans la hiérarchie des nouveaux schémas symétriques, il apparaît clairement que celui qui traite les éléments adjacents par côté est incontournable. Son application reste d'un grand apport en terme de *précision* étant donné que la singularité traitée, répartie sur tout un côté et qu'on a négligée dans l'ancien schéma non symétrique, est assez pondérée puisque pour chaque élément on évalue quatre intégrations de ce type. La non prise en compte de ces singularités dès le départ, était une erreur non sans conséquences. Il suit ensuite l'utilisation d'un schéma d'intégration symétrique sur deux éléments coïncidents, qui apporte une amélioration à la précision des résultats. Celle ci reste moins significative puisque l'ancien schéma non symétrique résorbait déjà la singularité sans

Paramètres			Modes d'intégration			
N_θ	N_r	r_2	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
4	2	3	43.00 %	0.88 %	0.40 %	0.40 %
4	3	3	140.00 %	2.30 %	0.45 %	0.45 %
6	2	3	14.00 %	1.40 %	0.39 %	0.39 %
6	3	3	76.00 %	1.60 %	0.45 %	0.45 %
4	2	4	4.73 %	1.53 %	0.81 %	0.81 %
4	3	4	32.80 %	1.14 %	0.68 %	0.68 %
4	4	4	113.00 %	2.17 %	0.87 %	0.87 %
6	2	4	1.03 %	1.07 %	0.61 %	0.61 %
6	3	4	20.40 %	0.99 %	0.50 %	0.50 %
6	4	4	10.60 %	0.81 %	0.48 %	0.48 %
4	2	5	262.00 %	1.80 %	0.89 %	0.89 %
4	3	5	494.00 %	1.65 %	0.65 %	0.65 %
4	4	5	162.00 %	1.81 %	0.69 %	0.69 %
6	2	5	1147.00 %	1.55 %	0.98 %	0.98 %
4	3	5	4.50 %	1.75 %	0.87 %	0.87 %
6	4	5	11.50 %	1.70 %	0.61 %	0.61 %

Tableau V.2: Cylindre, erreurs relatives maximales sur les déplacements radiaux.

toutefois respecter la symétrie de la formulation intégrale variationnelle de Galerkin. L'adoption d'un schéma d'intégration spécifique aux éléments adjacents par coin n'améliore pas d'une façon notable la précision. Ce résultat atteste bien de la faiblesse de la singularité qui le caractérise.

V.5 Temps d'intégration

L'optimisation du paramètre *temps d'intégration* a toujours constitué une de nos préoccupations majeures lors de nos développements. Hormis l'implantation du critère d'indicateur de sévérité, qui a optimisé l'ensemble des doubles intégrations régulières, l'implantation du nouveau schéma singulier symétrique, développé en (IV.4.5) a permis, non seulement d'intégrer *correctement*, en prenant en compte la symétrie des formulations mais aussi d'optimiser les intégrations singulières, en intégrant sur un minimum de points de Gauss. C'est ainsi qu'une étude a été réalisée pour quantifier l'apport ramené par ce schéma en termes de temps d'intégration, en comparant les différents résultats obtenus avec ceux donnés par l'ancien schéma. Celui-ci se résume au mode 1 d'intégration décrit lors de l'étude sur la structure cylindrique. L'exemple qui sert de test est

Différents maillages	Caractéristiques	
	Nombre d'éléments	Nombre de noeuds
<i>Maillage1</i>	24 éléments	74
<i>Maillage2</i>	48 éléments	146
<i>Maillage3</i>	72 éléments	218
<i>Maillage4</i>	96 éléments	290
<i>Maillage5</i>	120 éléments	362

Tableau V.3: Structure prismatique : description des différents maillages.

celui d'une structure prismatique soumise à un chargement uniaxial représentée par différents maillages rapportés dans le tableau (V.3).

Nous décomposons et définissons les pourcentages en temps d'intégration par rapport au temps total que dure la phase d'intégration, de la manière suivante :

- ◇ T_{reg} : le % pour l'ensemble des éléments réguliers.
- ◇ T_{conf} : le % pour l'ensemble des éléments confondus.
- ◇ T_{cote} : le % pour l'ensemble des éléments adjacents par côté.
- ◇ T_{coin} : le % pour l'ensemble des éléments adjacents par coin.

La répartition des types d'intégrations sur une structure à 24 éléments quadrilatéraux pour l'ancien schéma d'intégration non symétrique, est la suivante :

- ◇ 24 intégrations sur les éléments confondus.
- ◇ 384 intégrations sur les éléments réguliers.
- ◇ 96 intégrations sur les éléments adjacents par côté.
- ◇ 72 intégrations sur les éléments adjacents par coin.

Il apparait que, dans ces conditions, le temps d'intégration sur les éléments adjacents par côté est assez important, bien que ces derniers soient minoritaires par rapport aux éléments réguliers. L'intégration dans ce cas de figure est considérée comme régulière puisqu'elle ne prend pas en compte la singularité, elle utilise néanmoins un nombre important de points de Gauss vu que les éléments sont très rapprochés. Ce nombre est fixé par le critère d'*indicateur de sévérité*. Les intégrales sur des éléments coïncidents sont aussi prépondérantes malgré que ces derniers soient

en nombre très réduit. L'inadéquation du schéma *singulier*1 d'intégration singulière de type non symétrique est bien prouvée car non seulement il intègre mal, en ignorant complètement la symétrie des formulations de Galerkin (étude sur le cylindre), mais en plus, il utilise un très grand nombre de points de Gauss pour parvenir à une précision jugée acceptable.

Maillages	temps en (s)	Mode 1	Mode 2	Gain en (%)
Maillage1	T_{cote}	34.60	23.59	31.82
	T_{conf}	30.32	13.29	56.17
	T_{total}	82.77	54.6	34.03
Maillage2	T_{cote}	159.32	47.54	70.16
	T_{conf}	61.60	26.61	56.80
	T_{total}	296.51	151.85	48.78
Maillage3	T_{cote}	265.90	76	71
	T_{conf}	91.90	39.70	56.80
	T_{total}	562.03	315.3	43.90
Maillage4	T_{cote}	361.65	94.17	73.96
	T_{conf}	123.28	53.37	56.71
	T_{total}	1103.43	766.91	30.5
Maillage5	T_{cote}	456.16	117.86	74.16
	T_{conf}	153.09	66.27	56.71
	T_{total}	1772.59	1345.70	24.08

Tableau V.4: Apport du schéma singulier symétrique en termes de temps d'intégration.

Dans le tableau (V.4), nous n'avons considéré que les types d'intégrations qui ont connu un apport notable en temps CPU suite à l'incorporation du schéma d'intégration symétrique. Ce tableau montre que le gain en temps d'intégration total ramené par le schéma symétrique d'intégration singulière devient de plus en plus faible avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté de la structure. L'estimation du gain sur la durée de la phase d'intégration totale pour la même structure, mais cette fois ci modélisée avec 184 éléments (554 noeuds), donne une valeur de 15.70%. On peut prédire que ce gain deviendra insignifiant si le maillage de la structure devient extrêmement fin.

V.6 Conclusion

Plusieurs résultats de validation ont été présentés dans ce chapitre et ont permis de légitimer la formulation de couplage symétrique développée dans le cadre de ce présent de travail. Les premiers tests de validation présentés se rattachent à l'étude de structures sphériques. L'exemple de la cavité sphérique sous pression, dans un milieu infini avec plastification localisée du matériau au voisinage de la cavité, y figure. Ces études ont mis en évidence le bon fonctionnement de l'ensemble des algorithmes mais n'ont pas été tout à fait concluantes quant à l'apport qualitatif du nouveau schéma symétrique d'intégration singulière.

Une étude systématique avec différents maillages a été effectuée par la suite sur une structure cylindrique. Cette étude a permis de prouver que l'apport en termes de précision de résultats de celui-ci reste très important et que son développement et son implantation constituaient deux étapes incontournables. Son apport en terme de temps d'intégration devient très petit dès lors qu'on utilise des structures très finement maillées.

L'approche par collocations, d'une mise en oeuvre simple, a été implantée dans un premier temps, ce qui nous a permis de tester rapidement la possibilité d'implanter le super-élément dans CAST3M. Sur les différents exemples traités comparativement par les deux méthodes, nous n'avons pas encore mis en évidence une supériorité de l'une par rapport à l'autre en termes de précision. Nous pouvons juste affirmer que les méthodes intégrales variationnelles présentent les avantages suivants :

- ◊ Conduit à une matrice symétrique, d'où un gain de temps d'un facteur 2 sur la phase de résolution du système. Sur des structures à grands nombres de degrés de liberté, ces méthodes vont être très attractives puisque le temps de résolution varie en n^3 , si l'on désigne par n le nombre de degrés de liberté de la structure étudiée, alors que la variation du temps d'intégration ne varie qu'en n^2 . Ceci va compenser le temps d'intégration incontestablement plus long pour ces méthodes que celui de la méthode des collocations, en raison de la présence des doubles intégrales de surface.
- ◊ Le traitement des structures présentant des arêtes et des coins est relativement simple avec les méthodes intégrales variationnelles, en prenant le soin de dédoubler les noeuds en tension situés sur ces arêtes et ces coins. La tâche est plus délicate avec la méthode des collocations, puisqu'il est impératif de dédoubler en plus des noeuds de contrôle, les points de collocation.

Le développement d'un tel outil numérique a pour finalité de traiter des problèmes concrets. Les domaines d'application dans lesquels notre procédure de couplage trouvera ample utilité, sont divers et variés.

Un des champs d'application les plus attractifs reste celui de la mécanique de la rupture. Dans le prochain chapitre, nous nous proposons d'adapter les formulations intégrales de Galerkin existantes à l'étude d'un domaine élastique présentant une fissure interne non débouchante et de construire par la suite une procédure de couplage symétrique *éléments finis-éléments de frontière*. Le voisinage de la fissure présente des champs singuliers, ce domaine doit être traité en priorité par *éléments de frontière* et le domaine complémentaire sera maillé par *éléments finis*.

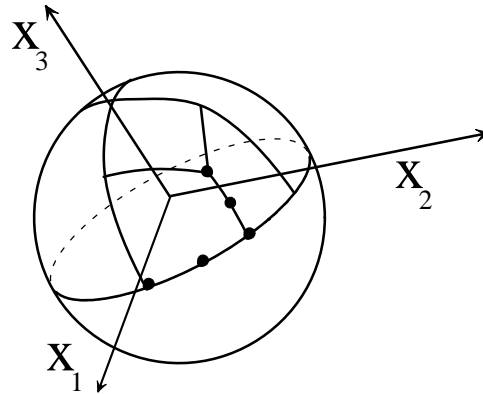


Figure V.9 : Les cinq noeuds de nature différente du maillage de la structure sphérique.

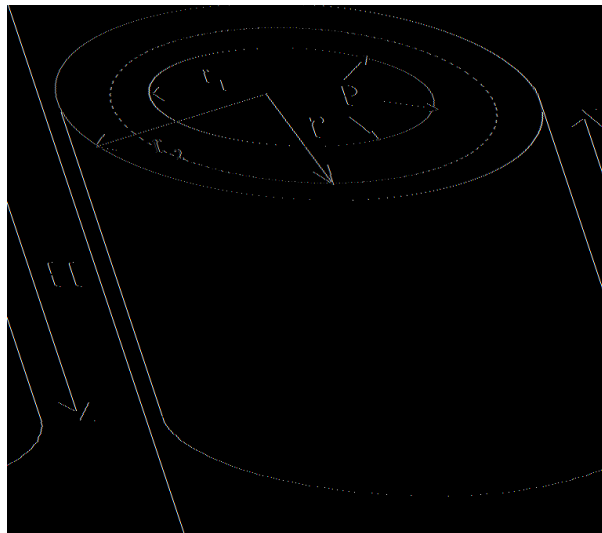


Figure V.10 : Cylindre soumis à une pression interne.

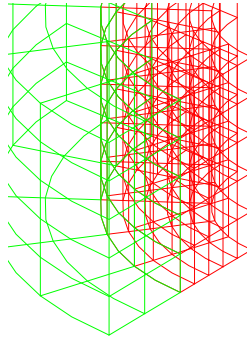


Figure V.11 : Maillages des domaines : interne par éléments finis et externe par éléments de frontière.

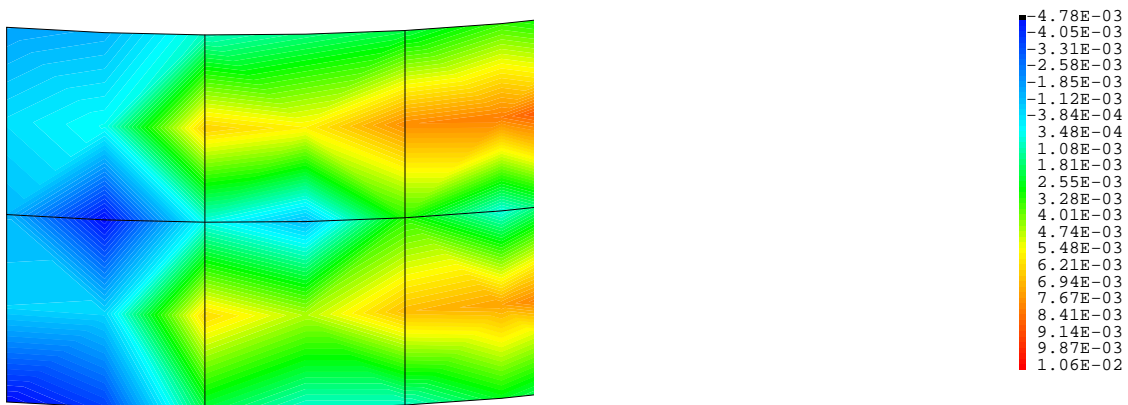


Figure V.12 : Visualisation des erreurs relatives maximales sur le déplacement radial : schéma d'intégration non symétrique.

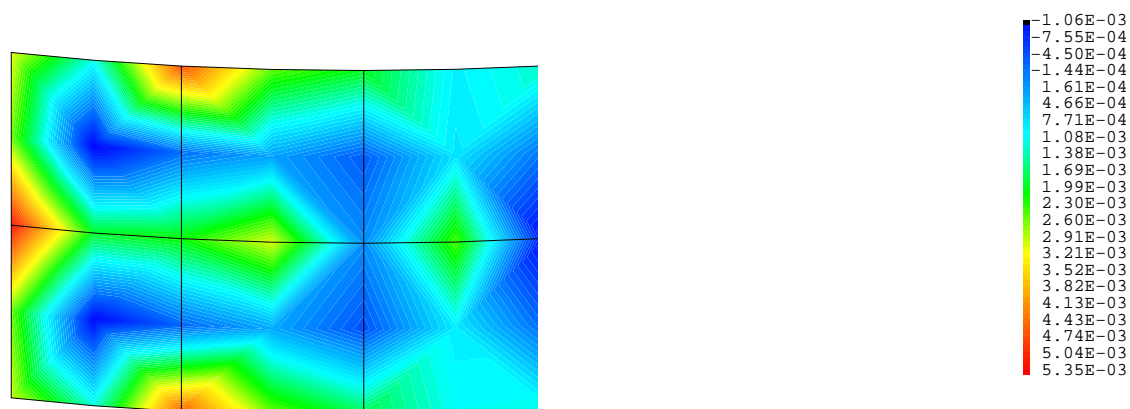


Figure V.13 : Visualisation des erreurs relatives maximales sur le déplacement radial : schéma d'intégration symétrique.

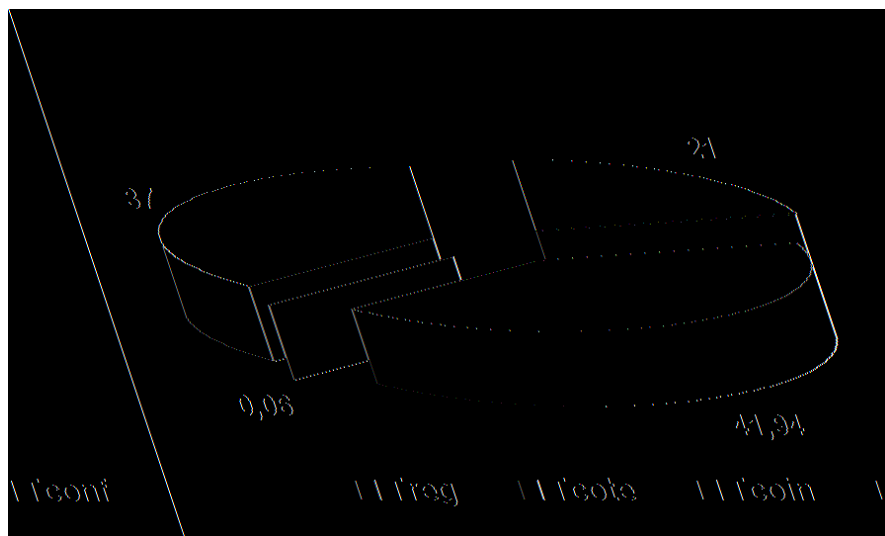


Figure V.14 : Répartition des temps d'intégration dans le prisme à 24 éléments : utilisation du schéma non symétrique.

Chapitre VI

Extension à la mécanique de la rupture

VI.1 Introduction

Les solutions analytiques des problèmes de mécanique de la rupture sont limitées à un nombre restreint de situations dans lesquelles le domaine contenant la fissure est supposé infini, homogène, isotrope et le chargement le sollicitant est relativement simple à définir. En pratique, malheureusement, les problèmes rencontrés sont autres et les domaines sont de dimensions finies et sont sollicités par des chargements bien complexes. Le recours à des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis ou celle des éléments de frontière, pour l'étude de cette classe de problèmes est donc une nécessité. Depuis quelques années, la mécanique de la rupture connaît un élan important de développements et devient de ce fait une branche très active de l'ingénierie.

Quand la zone des déformations inélastiques au voisinage de la pointe de fissure est suffisamment restreinte et petite, comparée à la longueur de la fissure, une solution basée sur l'élasticité linéaire peut fournir les informations nécessaires pour la détermination des facteurs d'intensité de contrainte nécessaires à une analyse en mécanique de la rupture. La méthode des éléments de frontière, par sa souplesse à définir la géométrie, spécialement des domaines tridimensionnels et par la grande précision qui caractérise ses résultats dans la détermination des champs singuliers au voisinage de la fissure, est adaptée à la recherche des solutions des problèmes de la mécanique de la rupture. Ainsi, en absence de forces de volume, seules les surfaces de la fissure et du domaine considéré sont discrétisées. Cette particularité trouve toute son importance lors des simulations numériques de propagation de fissure dans des situations tridimensionnelles ou la réactualisation de maillages en éléments de frontières est plus aisée que celle se basant sur d'autres méthodes numériques, entre autre la méthode des éléments finis.

VI.2 Difficultés de modélisation des fissures

Malheureusement, l'application directe de la méthode des éléments de frontière traditionnelle, basée sur l'approche par collocations pour modéliser les fissures conduit à la dégénérescence de la formulation numérique [33]. En effet, l'écriture intégrale en déplacement pour des points de la surface de la fissure conduit à une équation intégrale qui admet une infinité de solutions qui reste non exploitable [1]. Dès lors, l'information sur la tension correspondante est donc impossible à obtenir. Pour remédier à ce problème, on trouve dans la littérature trois types de formulations intégrales se basant sur l'approche par collocations et bien adaptées aux solides élastiques fissurés. La première de ces méthodes est celle de *sous-structuration* introduite par [15] et qui consiste à décomposer le domaine Ω en deux sous domaines fictifs, la fissure se situant dans ce cas sur la frontière fictive de séparation. Les travaux de [22] en propagation de fissure ont mis en évidence quelques difficultés liées à l'utilisation de cette frontière fictive.

Cette approche utilise uniquement les équations intégrales en déplacement mais conduit à résoudre deux problèmes élastiques couplés [22]. La seconde dite des *discontinuités de déplacements* introduite par [32] fait appel à l'écriture de l'équation intégrale de frontière en traction pour les points sur la surface de fissure S^c et celle en déplacement pour les points se situant sur la frontière externe $\partial\Omega$. L'équation intégrale en traction ainsi écrite pour des points de collocation situés sur la fissure, présente un noyau hypersingulier et n'est régularisée, comme on l'a vu au chapitre II, que pour les degrés de liberté en déplacements (sauts de déplacements) $\Delta \mathbf{u}$ de continuité $C^{1,\alpha}$ au point de collocation. Cette condition entraîne de sévères conséquences dans le choix des points de collocation, ainsi que dans celui des fonctions d'interpolation. De même pour la méthode *duale* qui a été présentée dans [54, 60] et qui utilise la formulation intégrale en déplacement sur une lèvre de la fissure et celle en traction sur l'autre lèvre, on y rencontre les mêmes difficultés de mise en oeuvre.

VI.3 Formulations variationnelles pour les solides élastiques fissurés

Une des alternatives est l'application des méthodes des équations intégrales symétriques de Galerkin. Les travaux relatifs à la modélisation des solides élastiques fissurés par application cette approche demeurent rares. Des formulations intégrales symétriques basées sur l'utilisation d'équations intégrales hypersingulières sont développées dans [37, 42, 52, 59]. Cette approche reste critiquable à cause de la présence du noyau fortement singulier de l'équation intégrale en traction. Une deuxième approche a été développée par [49] et consiste à reformuler les équations intégrales sous leurs formes faibles. Comme résultat important de cette

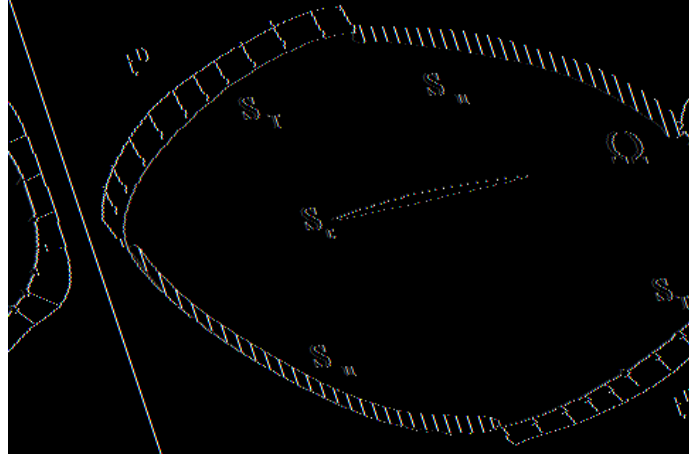


Figure VI.1 : Solide élastique fissuré.

régularisation, les sauts de déplacements à travers la surface de fissure doivent être de continuité $C^{0,\alpha}$. Les premières implantations numériques de cette approche pour des solides élastiques tridimensionnels fissurés sont décrites dans [50, 75].

Les formulations intégrales se basant sur un principe variationnel telles qu'elles sont décrites dans [16, 17] et que nous avons utilisées pour construire notre approche de couplage avec la méthode des éléments finis ne tiennent pas en compte d'une éventuelle présence de fissure dans le solide. Nous nous proposons donc dans le cadre de notre travail d'étendre ces formulations variationnelles à l'étude d'un solide élastique fissuré et à construire par la suite une approche de couplage avec les éléments finis en tenant compte de la présence d'une fissure interne non débouchante.

Considérons un solide élastique fissuré Ω , de frontière extérieure S et contenant une fissure S_c . Les deux lèvres S_c^+ et S_c^- de la fissure sont géométriquement confondues et munies de normales unitaires \mathbf{n}^+ et \mathbf{n}^- opposées et choisies de sorte que \mathbf{n} soit orientée de S_c^- vers S_c^+ . On pose alors que :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+ \quad (\text{VI.1})$$

La surface $S_c = S_c^+ = S_c^-$ est considérée comme une extension de la surface régulière extérieure du domaine et de façon à ce que la surface fermée totale résultante soit $\partial\Omega = S \cup S_c^+ \cup S_c^-$. Les efforts en tensions sont imposés sur S_T et les déplacements sont imposés sur S_u . En plus des conditions aux limites imposées sur les portions externes S_u et S_T de la frontière externe, nous considérerons que les lèvres de la fissure sont chargées symétriquement de manière à écrire que :

$$\mathbf{p}^+ = -\mathbf{p}^- = -\mathbf{p} \quad (\text{VI.2})$$

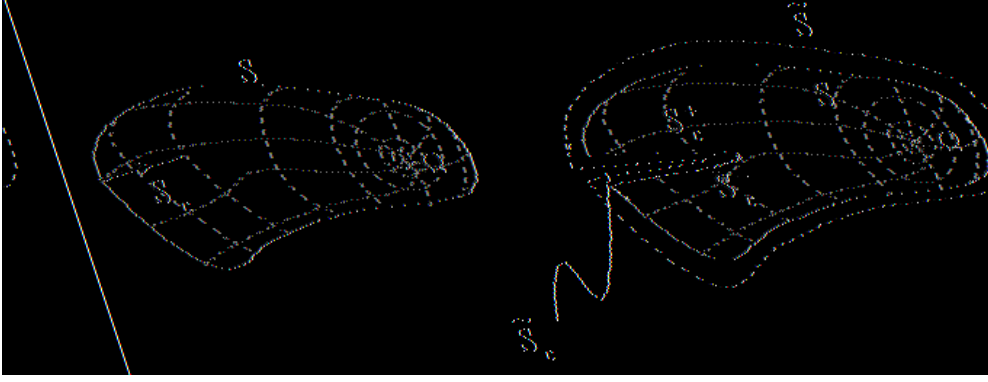


Figure VI.2 : Définition de Ω , S_c et des surfaces auxilliaires.

Nous définissons l'ouverture de la fissure ou le saut du déplacement à travers la surface S_c comme étant $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$. La surface S_c est une représentation idéalisée de la fissure, nous avons donc considéré dans un premier temps, que la frontière $\bar{S}_c = S_c^+ \cup S_c^-$ ne diffère de S_c que dans la définition qu'on donne à la fissure, dans le sens que S_c est remplacée par la surface représentant les deux lèvres sous forme de surfaces séparées. La surface \bar{S}_c est fonction d'un paramètre infintésimal I , pour $I \rightarrow 0$, nous avons $\bar{S}_c \rightarrow S_c$. Il devient clair que l'on peut poser que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^+ = \mathcal{I}^+(\mathbf{x}; I), \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^+ & : \mathbf{x} \in S_c, \mathbf{x}^+ \in S_c^+ \\ \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^- = \mathcal{I}^-(\mathbf{x}; I), \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^- & : \mathbf{x} \in S_c, \mathbf{x}^- \in S_c^- \end{aligned} \quad 0 \leq I \ll 1 \quad (\text{VI.3})$$

Comme on peut écrire que :

$$\mathcal{I}^+(\mathbf{x}; 0) = \mathcal{I}^-(\mathbf{x}; 0) = \mathbf{x}$$

Cette dernière écriture traduit le fait que pour $I = 0$, nous avons les deux lèvres S_c^+ et S_c^- de la fissure qui coïncident. Pour revenir à notre configuration de départ, où la fissure est représentée par la surface ouverte S_c , nous nous efforcerons de réécrire les expressions des formulations écrites précédemment, après un passage à la limite en posant que $I \rightarrow 0$, et que $\bar{S}_c \rightarrow S_c$.

Nous reprenons les mêmes étapes décrites dans la section (II.5) pour construire nos formulations variationnelles symétriques de Galerkin, en prenant le soin d'introduire une surface auxilliaire $\tilde{S}_{totale} = \tilde{S} \cup \tilde{S}_c$ parcourue par le point \mathbf{z} et qui aura pour limite la surface $S \cup S_c$ lors du processus de passage à la limite. Si la fissure est interne (non débouchante), il est évident que la surface S_c devient fermée. C'est ce dernier cas que l'on va considérer dans la suite de notre travail.

L'écriture de la condition de stationnarité devient alors la suivante sous l'hypothèse que les

forces de volume soient nulles :

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{u}) = & \int_{S_u} \mathbf{u}^D T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS + \int_{S_T} \mathbf{u} T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS - \int_{S_T} \mathbf{t}^D \delta\mathbf{u} \, dS \\ & - \int_{S_u} \mathbf{t} \delta\mathbf{u} \, dS + \int_{S_c^+} \mathbf{u}^+ T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS + \int_{S_c^-} \mathbf{u}^- T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS \\ & + \int_{S_c^+} \mathbf{p} \delta\mathbf{u}^+ \, dS - \int_{S_c^-} \mathbf{p} \delta\mathbf{u}^- \, dS \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

De même que les expressions des fonctions test en déplacements et en contraintes définies dans (II.35) et (II.36), nous introduisons les nouvelles formes des fonctions test comme suit :

FONCTION TEST EN DÉPLACEMENT.

$$\begin{aligned} \delta u_k(\mathbf{x}) = & \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_i(\mathbf{z}) n_j(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \, dS_z + \int_{\tilde{S}_c^+} \tilde{u}_i^+(\mathbf{y}) n_j^+(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \, dS_z \\ & + \int_{\tilde{S}_c^-} \tilde{u}_i^-(\mathbf{y}) n_j^-(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \, dS_z - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_i(\mathbf{z}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \, dS_z \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

FONCTIONS TEST EN CONTRAINTES.

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = & C_{klab} \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \, dS_z - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \, dS_z \\ & + C_{klab} \int_{\tilde{S}_c^+} \tilde{u}_k^+(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \, dS_z + C_{klab} \int_{\tilde{S}_c^-} \tilde{u}_k^-(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \, dS_z \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

Nous réécrivons l'expression (VI.4) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{u}) = & \int_{S_u} u_i(\mathbf{x})^D n_j(\mathbf{x}) \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \, dS + \int_{S_T} u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \, dS - \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) \, dS \\ & - \int_{S_u} t_k(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) \, dS + \int_{S_c^+} u_i^+(\mathbf{x}) n_j^+(\mathbf{x}) \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \, dS \\ & + \int_{S_c^-} u_i^-(\mathbf{x}) n_j^-(\mathbf{x}) \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \, dS + \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \delta\Delta u_k(\mathbf{x}) \, dS \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Nous avons posé que :

$$\begin{aligned} \delta u^+(\mathbf{x}) &= \delta u(\mathbf{x}^+) \\ \delta u^-(\mathbf{x}) &= \delta u(\mathbf{x}^-) \end{aligned}$$

et que :

$$\delta u(\mathbf{x}^+) - \delta u(\mathbf{x}^-) = \delta\Delta u_k(\mathbf{x})$$

En prenant compte des conventions prises initialement en équation (VI.1), et en gardant présent à l'esprit que l'ouverture de fissure $\Delta \mathbf{u}$ (saut à travers S_c du déplacement \mathbf{u}) s'écrit :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (\text{VI.8})$$

Nous reformulons l'équation (VI.7) de manière à faire apparaître cette dernière entité citée :

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\mathbf{u}) = & \int_{S_u} u_i(\mathbf{x})^D n_j(\mathbf{x}) \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dS + \int_{S_T} u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dS - \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) dS \\ & - \int_{S_u} t_k(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) dS - \int_{S_c} \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dS + \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \delta \Delta u_k(\mathbf{x}) dS \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

D'une façon analogue, nous reformulons les expressions (VI.5) et (VI.6) et nous posons :

$$\begin{aligned} \delta u_k(\mathbf{x}) = & \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_i(\mathbf{z}) n_j(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z - \int_{\tilde{S}_c} \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{z}) n_j(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z \\ & - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_i(\mathbf{z}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z \end{aligned} \quad (\text{VI.10})$$

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = & C_{klab} \int_{\tilde{S}_T} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z - \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z \\ & - C_{klab} \int_{\tilde{S}_c} \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

Sachant que

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^+ - \tilde{\mathbf{u}}^- = -\delta \Delta \mathbf{u} \quad (\text{VI.12})$$

est la fonction test en terme de saut de déplacements, définie sur la surface de fissure S_c . La substitution des expressions des équations (VI.10) et (VI.11) dans la condition de stationnarité (VI.9) donne lieu à l'écriture du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \forall \tilde{\mathbf{t}} & \delta P^U = E_1 + E_2 + E_3 = 0 \\ \forall \tilde{\mathbf{u}} & \delta P^T = F_1 + F_2 + F_3 = 0 \\ \forall \Delta \tilde{\mathbf{u}} & \delta P_c^T = J_1 + J_2 + J_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.13})$$

Les termes F_1 , F_2 , E_1 et E_2 sont identiquement identifiés à ceux donnés dans (II.40), nous ne redonnerons donc pas leurs formes explicites. Nous ne considérons que les termes dûs à la présence de la fissure. Considérons alors l'expression du dernier terme E_3 , donné par

$$E_3 = \int_{S_c} \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_u} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \quad (\text{VI.14})$$



Figure VI.3 : Géométrie de la surface de la fissure.

Cette intégrale est toujours régulière, étant donné que la fissure est considérée non débouchante, c'est à dire que $S \cap S_c = \emptyset$. L'expression limite de E_3 est obtenue en remplaçant $(\tilde{S}_u, \mathbf{z})$, par (S_u, \mathbf{y}) :

$$E_3 = \int_{S_u} \int_{S_c} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \quad (\text{VI.15})$$

De même nous posons que :

$$F_3 = - \int_{S_c} \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_T} C_{klab} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \quad (\text{VI.16})$$

$$F_3 = - \int_{S_c} \int_{S_T} (R \Delta u)_{iq}(\mathbf{x}) (R \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y dS_x$$

L'apparition du *rotationnel surfacique* dans l'expression de l'intégrale de surface portant sur la fissure est une conséquence d'une double application de la formule de Stokes (II.52). La surface S_c étant ouverte, l'application de la formule de Stokes fait apparaître des termes $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ portant sur le contour de S_c . Dans le cas de notre problème, nous avons imposé $\Delta \mathbf{u} = 0$ et $\Delta \tilde{\mathbf{u}} = 0$ sur le contour de la fissure, ce qui revient à annuler $\mathcal{C}(\mathbf{x})$.

Les termes de la dernière égalité du système (VI.13) sous leurs formes explicites se traduisent

comme suit :

$$J_1 = - \int_{S_u} u_i^D(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) C_{klab} \int_{\tilde{S}_c} \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \\ - \int_{S_T} u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_c} C_{klab} \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dS_z dS_x \quad (\text{VI.17})$$

$$J_2 = + \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_c} \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{z}) n_j(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z dS_x \\ + \int_{S_u} t_k(\mathbf{x}) \int_{\tilde{S}_c} \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{z}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z dS_x - \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS \quad (\text{VI.18})$$

$$J_3 = \int_{S_c} \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) C_{klab} \int_{\tilde{S}_c} \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_b} \Sigma_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.19})$$

La reformulation des termes précédents sous leurs expressions limites est alors la suivante :

$$J_1 = - \int_{S_u} \int_{S_c} (Ru^D)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \\ - \int_{S_T} \int_{S_c} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.20})$$

$$J_2 = \int_{S_c} \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) dS_z dS_x \\ + \int_{S_c} \int_{S_u} t_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x - \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS \quad (\text{VI.21})$$

$$J_3 = \int_{S_c} \int_{S_c} (R\Delta u)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{z}) dS_z dS_x \quad (\text{VI.22})$$

C'est ainsi que nous nous proposons d'écrire la formulation intégrale variationnelle symétrique directe pour un domaine élastique fissuré et aux limites mixtes entièrement régularisée comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{\Delta uu}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathfrak{F}_u(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) + \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) + \mathcal{B}_{\Delta ut}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathfrak{F}_t(\tilde{\mathbf{t}}) \\ \mathcal{B}_{u\Delta u}(\mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{t\Delta u}(\mathbf{t}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{\Delta u\Delta u}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = \mathfrak{F}_{\Delta u}(\Delta \tilde{\mathbf{u}}) \end{cases} \quad (\text{VI.23})$$

Les expressions de $\mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})$, $\mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}})$, $\mathcal{B}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}})$, $\mathcal{B}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}})$, $\mathfrak{F}_u(\tilde{\mathbf{u}})$, $\mathfrak{F}_t(\tilde{\mathbf{t}})$ sont propres au solide non fissuré et sont donc données par (II.66–II.71). Les différentes formes bilinéaires qui interviennent dans la formulation ainsi écrite et qui sont dûes à la présence de la fissure sont données par :

$$\mathcal{B}_{\Delta uu}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_c} \int_{S_T} (R\Delta u)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.24})$$

$$\mathcal{B}_{\Delta ut}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = + \int_{S_c} \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (\text{VI.25})$$

$$\mathcal{B}_{u\Delta u}(\mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_T} \int_{S_c} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS \quad (\text{VI.26})$$

$$\mathcal{B}_{t\Delta u}(\mathbf{t}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = + \int_{S_u} \int_{S_c} t_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.27})$$

$$\mathcal{B}_{\Delta u\Delta u}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{S_c} \int_{S_c} (R\Delta u)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.28})$$

De la même manière nous définissons la forme linéaire présente dans (VI.23) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\Delta u}(\Delta \tilde{\mathbf{u}}) = & \int_{S_u} \int_{S_c} (Ru^D)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_z dS_x \\ & - \int_{S_T} \int_{S_c} t_k^D(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x + \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

VI.3.1 Couplage avec la méthode des éléments finis

Nous nous efforcerons dans cette section de construire d'une manière analogue à celle suivie en section (III.3.2), une méthode de couplage avec la méthode des éléments finis pour un solide élastique fissuré.

PROBLÈME DE NEUMANN.

Le problème considéré est tel que : $S_T = S$ et $S_u = \emptyset$

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{B}}_{\Delta uu}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{D}_u(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \bar{\mathcal{B}}_{u\Delta u}(\mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{t\Delta u}(\mathbf{t}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{\Delta u\Delta u}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{D}_{\Delta} \tilde{\mathbf{u}}(\Delta \tilde{\mathbf{u}}) \end{cases} \quad (\text{VI.30})$$

PROBLÈME DE DIRICHLET.

Le problème considéré est tel que : $S_u = S$ et $S_T = \emptyset$

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{B}}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) + \bar{\mathcal{B}}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) + \bar{\mathcal{B}}_{\Delta ut}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathcal{D}_t(\tilde{\mathbf{t}}) \\ \bar{\mathcal{B}}_{t\Delta u}(\mathbf{t}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{u\Delta u}(\mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{\Delta u\Delta u}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{D}_{\Delta} \tilde{\mathbf{u}}(\Delta \tilde{\mathbf{u}}) \end{cases} \quad (\text{VI.31})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{\Delta uu}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_c} \int_S (R\Delta u)_{iq}(\mathbf{x})(R\tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.32})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{u\Delta u}(\mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_S \int_{S_c} (Ru)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS \quad (\text{VI.33})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{t\Delta u}(\mathbf{t}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = + \int_S \int_{S_c} t_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.34})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{\Delta ut}(\Delta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) = + \int_{S_c} \int_S \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \Delta u_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.35})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{\Delta u\Delta u}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{S_c} \int_{S_c} (R\Delta u)_{iq}(\mathbf{x}) B_{ikqs}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (R\Delta \tilde{u})_{ks}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VI.36})$$

$$\mathcal{D}_u(\tilde{\mathbf{u}}) = (\kappa - 1) \int_S t_k^D(\mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_x \quad (\text{VI.37})$$

$$\mathcal{D}_t(\mathbf{t}) = \kappa \int_S \tilde{t}_k(\mathbf{x}) u_k^D(\mathbf{x}) dS_y \quad (\text{VI.38})$$

$$\mathcal{D}_{\Delta u}(\Delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{u}) dS \quad (\text{VI.39})$$

Supposons que le domaine élastique Ω soit borné ($\kappa = 0$) et identifions les différentes expressions de l'énergie de frontière S du solide élastique fissuré:

$$2W_F = \int_S t_k^D(x) \tilde{u}_k(x) dS_x - \int_{S_c} p_k(\mathbf{x}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_x \quad (\text{VI.40})$$

Nous menons donc les mêmes étapes que celles de la section (III.3.2) pour construire une approche de couplage symétrique avec la méthode des éléments finis et nous considérons que notre super-élément intégral représente le domaine fissuré et que les inconnues primales sont donc le champ des déplacements \mathbf{u} et les champs des discontinuités de déplacements $\Delta \mathbf{u}$ sur la surface de fissure. Sans détailler l'ensemble des étapes, nous pouvons écrire formellement que l'énergie de frontière du solide fissuré est donnée sous sa forme continue par :

$$\begin{aligned} 2W_T = & (\tilde{\mathcal{B}}_{ut} \tilde{\mathcal{B}}_{tt}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}_{tu} - \bar{\mathcal{B}}_{uu}) + (\bar{\mathcal{B}}_{\Delta ut} \bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1} \bar{\mathcal{B}}_{t\Delta u} - \bar{\mathcal{B}}_{\Delta u\Delta u}) \\ & + (\tilde{\mathcal{B}}_{ut} \bar{\mathcal{B}}_{tt}^{-1} \bar{\mathcal{B}}_{t\Delta u} - \bar{\mathcal{B}}_{u\Delta u}) + (\bar{\mathcal{B}}_{\Delta ut} \tilde{\mathcal{B}}_{tt}^{-1} \mathcal{B}_{tu} - \bar{\mathcal{B}}_{\Delta uu}) \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

DISCRÉTISATION ET MATRICE DE RIGIDITÉ.

Cette dernière expression est une fonction uniquement des champs \mathbf{u} , $\tilde{\mathbf{u}}$, $\Delta \mathbf{u}$ et $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$. Nous appliquerons la méthode de Galerkin en posant alors que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, $\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \Delta \mathbf{u}$. Chacune des surfaces du solide élastique et de la fissure qu'il contient seront approximées par respectivement N_e et N_c éléments de frontière. Nous reviendrons un peu plus loin dans notre mémoire sur la nature des éléments de frontière propres à la surface de fissure. Les champs inconnus sont alors

approximés selon (IV.6) et nous poserons la forme discrétisée de l'énergie de frontière du solide fissuré comme suit :

$$2\bar{W}_T = \{\mathbf{u}\}^T (\mathbf{B}_{ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{tu} - \mathbf{B}_{uu}) \{\mathbf{u}\} + \{\Delta \mathbf{u}\}^T (\mathbf{B}_{\Delta ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{t\Delta u} - \mathbf{B}_{\Delta u \Delta u}) \{\Delta \mathbf{u}\} \\ + \{\mathbf{u}\}^T (\mathbf{B}_{ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{t\Delta u} - \mathbf{B}_{u \Delta u}) \{\Delta \mathbf{u}\} + \{\Delta \mathbf{u}\}^T (\mathbf{B}_{\Delta ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{tu} - \mathbf{B}_{\Delta uu}) \{\mathbf{u}\} \quad (\text{VI.42})$$

où les expressions \mathbf{B}_{ab} désignent les matrices résultantes de l'étape de discrétisation des différentes formes bilinéaires \mathcal{B}_{ab} et $\{\mathbf{u}\}$, $\{\Delta \mathbf{u}\}$ sont les vecteurs des valeurs nodales des champs \mathbf{u} et $\Delta \mathbf{u}$. Nous pouvons écrire que :

$$\bar{W}_T = \{\mathbf{u} \ \Delta \mathbf{u}\}^T \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{UU}^1 & \mathbf{K}_{U\Delta U}^3 \\ \mathbf{K}_{\Delta UU}^4 & \mathbf{K}_{\Delta U \Delta U}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.43})$$

Finalement la matrice de rigidité du *super-élément* du domaine élastique fissuré est donnée par l'expression ci dessous :

$$\mathbf{K}_{SE}^F = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{UU}^1 & \mathbf{K}_{U\Delta U}^3 \\ \mathbf{K}_{\Delta UU}^4 & \mathbf{K}_{\Delta U \Delta U}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.44})$$

Avec

$$\mathbf{K}_{UU}^1 = (\mathbf{B}_{ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{tu} - \mathbf{B}_{uu}) \quad (\text{VI.45})$$

$$\mathbf{K}_{\Delta U \Delta U}^2 = (\mathbf{B}_{\Delta ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{t\Delta u} - \mathbf{B}_{\Delta u \Delta u}) \quad (\text{VI.46})$$

$$\mathbf{K}_{U\Delta U}^3 = (\mathbf{B}_{ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{t\Delta u} - \mathbf{B}_{u \Delta u}) \quad (\text{VI.47})$$

$$\mathbf{K}_{\Delta UU}^4 = (\mathbf{B}_{\Delta ut} \mathbf{B}_{tt}^{-1} \mathbf{B}_{tu} - \mathbf{B}_{\Delta uu}) \quad (\text{VI.48})$$

Les matrices \mathbf{K}_{UU}^1 et $\mathbf{K}_{\Delta U \Delta U}^2$ obtenues sont symétriques et $\mathbf{K}_{U\Delta U}^3$ et $\mathbf{K}_{\Delta UU}^4$ sont transposées l'une de l'autre. La matrice de rigidité finale du solide élastique fissuré est donc bien symétrique.

VI.3.2 Implantation numérique

Les frontières S et S_c sont partitionnées respectivement en N_e et N_c éléments de frontière. Pour chaque élément de frontière, les déplacements \mathbf{u} et les tensions \mathbf{t} sur la surface régulière sont interpolés selon (IV.6). Les sauts de déplacements $\Delta \mathbf{u}$ sur la surface de la fissure sont interpolés avec les fonctions de forme usuelles et nous écrivons que :

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_I} N_m(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}^m \quad (\text{VI.49})$$

où N_I est le nombre de noeuds de chaque élément, et N_m représente les fonctions de forme associées au noeud m de l'élément. $\Delta \mathbf{u}^m$ n'est autre que le vecteur des valeurs prises aux noeuds par le champ du saut de déplacements $\Delta \mathbf{u}$.

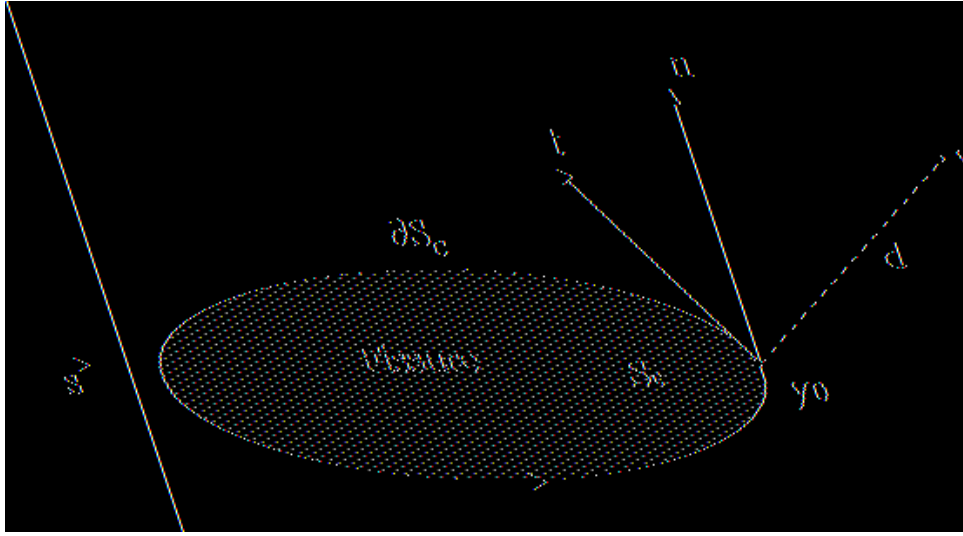


Figure VI.4 : Repérage d'un point y au voisinage du front de fissure.

DÉTERMINATION DES FACTEURS D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES.

D'autre part, il est bien connu que les champs de déformations et de contraintes élastiques sont singuliers au voisinage du front de fissure [24].

On définit un trièdre direct $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$, formé de vecteurs unitaires : \mathbf{n} défini comme le vecteur normal à la surface de fissure S_c , \mathbf{t} défini comme le vecteur tangent ∂S_c et \mathbf{s} comme étant le vecteur de la normale à ∂S_c , sortante de S_c de manière à écrire que :

$$\mathbf{s} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \quad (\text{VI.50})$$

Les sauts de déplacements $\Delta \mathbf{u}$ sont reliés aux facteurs d'intensité de contrainte par les relations suivantes :

$$\Delta \mathbf{u}_n = K_I \frac{4(1-\nu)}{\mu} \left[\frac{d}{2\pi} \right]^{1/2} + O(d) \quad (\text{VI.51})$$

$$\Delta \mathbf{u}_s = K_{II} \frac{4(1-\nu)}{\mu} \left[\frac{d}{2\pi} \right]^{1/2} + O(d) \quad (\text{VI.52})$$

$$\Delta \mathbf{u}_t = K_{III} \frac{4}{\mu} \left[\frac{d}{2\pi} \right]^{1/2} + O(d) \quad (\text{VI.53})$$

Pour déterminer ces facteurs d'intensité de contrainte, nous pouvons appliquer la méthode qui se base sur l'utilisation d'éléments spéciaux avec *noeuds au quart*. Nous reprenons ci dessous, la démarche exposée dans [16].

DESCRIPTION DE L'ÉLÉMENT SPÉCIAL.

L'élément adjacent au front de fissure est un l'élément spécial capable de décrire les singularités en $d^{1/2}$ des champs au voisinage de la fissure. Considérons alors un élément quadrilatéral isoparamétrique à 8 noeuds adjacent au front de fissure, avec les noeuds 1, 2 et 3 alignés sur un segment perpendiculaire au front de la fissure. Les noeuds médians de cet élément sont déplacés au quart. Nous écrivons alors que :

$$\mathbf{y}^2 - \mathbf{y}^1 = -a \mathbf{s} \quad (\text{VI.54})$$

$$\mathbf{y}^3 - \mathbf{y}^1 = -4a \mathbf{s} \quad (\text{VI.55})$$

Le noeud $\mathbf{y}^2 \in [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^3]$ et est situé au quart de la longueur $\|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^3\| = 4a$. Le long du segment $[\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^3]$ l'interpolation est quadratique et le point \mathbf{y} est paramétré par :

$$\mathbf{y} = N_1(\xi)\mathbf{y}^1 + N_2(\xi)\mathbf{y}^2 + N_3(\xi)\mathbf{y}^3 \quad (\text{VI.56})$$

Les fonctions d'interpolation sont celles d'un élément quadratique à 3 noeuds et sont données par :

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (\text{VI.57})$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (\text{VI.58})$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (\text{VI.59})$$

Nous pouvons poser alors que

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}^1 = -(1 + \xi)^2 a \mathbf{s}$$

et la distance devient alors :

$$d = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^1\| = a(1 + \xi)^2 \quad (\text{VI.60})$$

Donnons alors l'expression de l'interpolation du saut de déplacement $\Delta \mathbf{u}$, en prenant en compte le fait que $\Delta \mathbf{u}^1 = 0$, car l'ouverture de fissure est nulle sur le front de fissure. Nous écrivons alors que :

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{y}) = N_2(\xi)\Delta \mathbf{u}^2 + N_3(\xi)\Delta \mathbf{u}^3 \quad (\text{VI.61})$$

$$= (1 + \xi) \left[\Delta \mathbf{u}^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta \mathbf{u}^3 - \Delta \mathbf{u}^2 \right) \xi \right] \quad (\text{VI.62})$$

et en fonction de d , nous réécrivons l'expression précédente comme suit :

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{y}) = [d/a]^{1/2} \left[2\Delta \mathbf{u}^2 - \frac{1}{2}\Delta \mathbf{u}^3 + [d/a]^{1/2} \left(\frac{1}{2}\Delta \mathbf{u}^3 - \Delta \mathbf{u}^2 \right) \right] \quad (\text{VI.63})$$

A l'aide des fonctions d'interpolation usuelles, il est possible de représenter la variation en $d^{1/2}$ de $\Delta \mathbf{u}$ au voisinage du front de fissure.

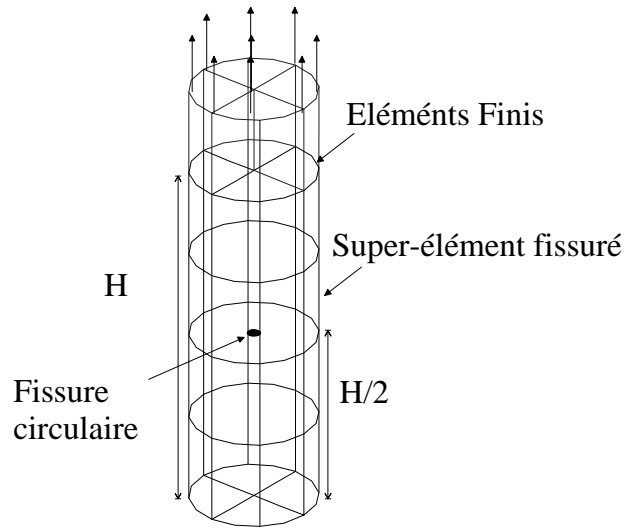


Figure VI.6 : Fissure interne circulaire dans un barreau cylindrique.

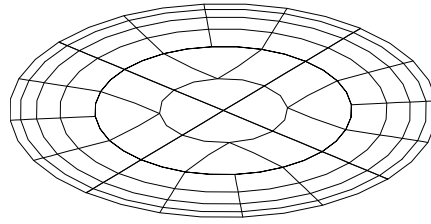


Figure VI.7 : Maillage de la fissure circulaire non débouchante.

VI.3.3 Conclusion et perspectives

Une formulation intégrale variationnelle adaptée à l'étude d'un domaine élastique tridimensionnel présentant une fissure interne non débouchante a été développée dans le cadre de ce chapitre. Nous avons procédé à la construction de la matrice de rigidité symétrique d'un super-élément intégral représentant le domaine élastique fissuré. Cette matrice de rigidité est rajoutée à celle du domaine complémentaire discrétisé par éléments finis. Nous avons ensuite essayé de donner une idée succincte sur la nature de l'élément spécial adjacent au front de fissure, capable de représenter la singularité qui caractérise les champs de déplacements au voisinage de la fissure. Le développement et l'implantation d'une telle matrice de rigidité du super-élément fissuré en termes de degrés de liberté de déplacement sur la frontière externe du domaine et de saut

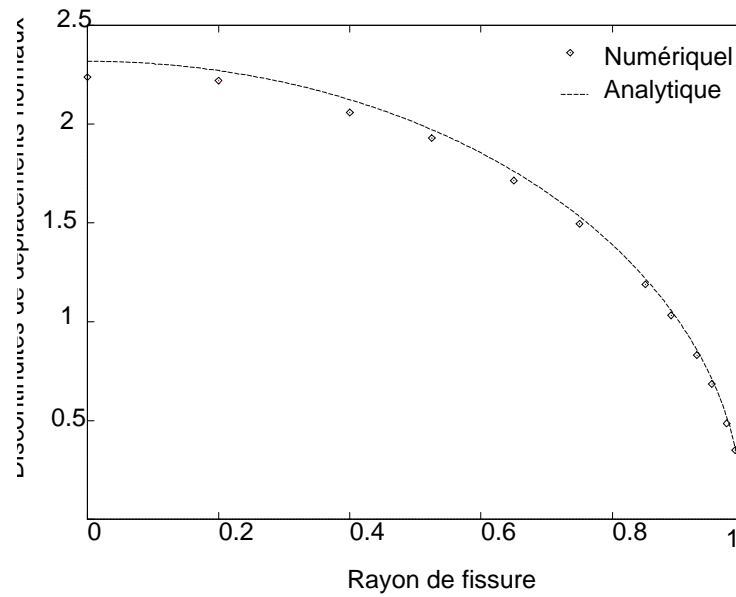


Figure VI.8 : Discontinuités de déplacements le long du rayon de la fissure.

de déplacement sur la surface propre à la fissure, nous ont permis de procéder à une validation numérique portant sur un barreau cylindrique présentant une fissure circulaire, centrée, en mode I et non débouchante. Le cas où le barreau cylindrique est entaillé par une fissure débouchante reste bien évidemment tout à fait possible. Les résultats numériques en termes d'erreurs relatives observées sur l'évaluation des facteurs de contraintes K_I , qui ont été comparés à la solution bien connue de la fissure circulaire en mode I en milieu infini, restent très convaincants.

Le prochain chapitre est celui qui décrit une extension des formulations intégrales de Galerkin telles qu'elles sont utilisées dans ce mémoire à l'étude d'un domaine semi-infini privé d'une cavité définie par sa surface fermée et qui constituera l'interface avec un sous domaine que l'on discrétisera par éléments finis. Ce sous domaine pouvant bien évidemment contenir des non linéarités. Nous montrerons bien, à travers ce chapitre la grande l'efficacité et utilité des méthodes intégrales dans le traitement des *milieux infinis* ou *semi-infinis*.

Chapitre VII

Extension à étude de l'interaction sol-structure

VII.1 Introduction

Un des points forts des méthodes intégrales est bien leur capacité à pouvoir représenter des domaines infinis ou semi-infinis sans avoir recours à des troncatures artificielles. Ces dernières demeurent une source d'erreurs et de lourdeur de calcul. Ce point est particulièrement important dans le domaine de la dynamique, où l'introduction de telles surfaces artificielles est à l'origine de réflexions parasites d'ondes sortantes. Les problèmes nécessitant la discrétisation de milieux infinis ou semi-infinis doivent en priorité être traités à l'aide des méthodes intégrales. D'autre part la présence d'une région pouvant contenir des non linéarités conduit *a priori* à utiliser la méthode des éléments finis, même s'il est également possible dans certains cas de décrire cette région par les méthodes intégrales telles qu'elles sont introduites dans les travaux de Burgardt [25] et ceux de Bonnet et al. [21]. Dans une telle situation, la procédure de couplage développée dans les chapitres précédents peut être d'un apport très bénéfique.

Dans le présent chapitre, nous nous proposons de décrire des problèmes traités par équations intégrales variationnelles symétriques de Galerkin, faisant intervenir un espace *semi infini* à surface libre, tel que le sol, et ceci dans les deux configurations suivantes :

- ◊ Dans un premier temps nous considérerons un sol dans lequel est creusée une cavité souterraine de frontière S_C .
- ◊ Dans un second temps, nous rajouterons un chargement \bar{P} à la surface. Ce dernier peut se résumer par exemple à l'effet d'une fondation de frontière S_F supportant une structure.

Le premier problème tel qu'il est introduit peut être traité par application du principe des équations intégrales variationnelles symétriques de Galerkin décrites dans [16, 17, 18], en prenant le soin de choisir adéquatement les solutions fondamentales et sous l'hypothèse que les frontières S_C de la cavité et la frontière du demi-espace $\partial\Omega$ restent distinctes. Pour ce qui du problème

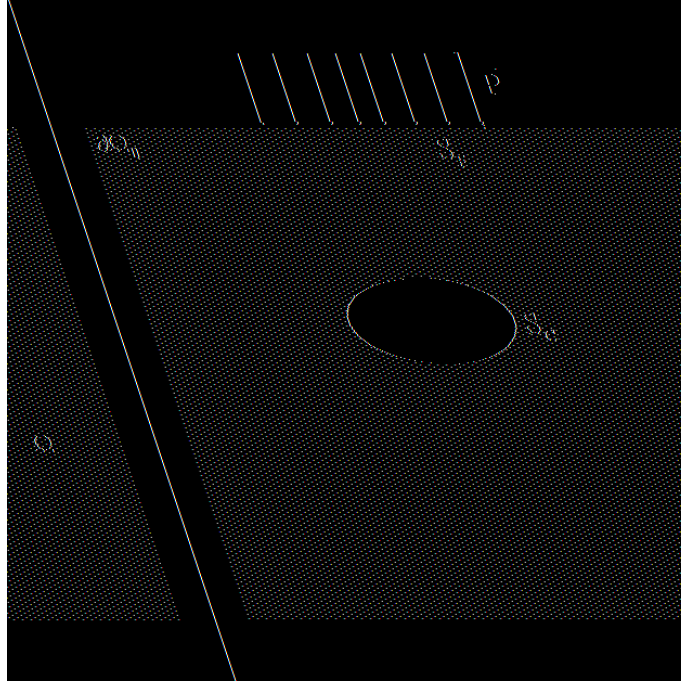


Figure VII.1 : Demi-espace Ω , cavité souterraine S_C et fondation S_F .

intervenant en second point, une petite extension des formulations intégrales telles qu'elles sont décrites jusqu'à présent est introduite pour bien prendre compte l'effet du chargement \bar{P} à la surface.

VII.2 Description du problème

La région Ω de frontière $\partial\Omega$ est donc limitée par le demi-espace $y_3 \geq 0$ et est privée de la cavité définie par la surface fermée et bornée S_C . Cette dernière constitue l'interface avec le sous domaine borné discrétisé par éléments finis. La portion de $\partial\Omega$ qui reste libre ($T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour $y_3 = 0$, $i=1, 2, 3$) est désignée par $\partial\Omega_o$.

Il nous est offert deux possibilités pour la représentation de ces problèmes :

- ◇ l'utilisation des solutions fondamentales de Kelvin utilisées jusqu'à présent.
- ◇ L'utilisation des solutions fondamentales de Mindlin introduites dans [55, 56], qui vérifient identiquement la condition de surface libre sur le plan $y_3 = 0$

Dans le cas de l'utilisation des solutions de Kelvin, les intégrales porteront sur l'ensemble des surfaces introduites à savoir : $\partial\Omega_o$, S_F et S_C . Comme la surface $\partial\Omega_o$ est illimitée et s'étend donc jusqu'à l'infini, on doit choisir entre :

- ◊ lors de l'étape de la discrétisation, tronquer $\partial\Omega_o$ à une distance importante de la fondation et de la cavité,
- ◊ Utiliser des éléments de surface infinis [14, 34], ce qui suppose la connaissance du comportement asymptotique à l'infini des champs élastiques

Pour que les intégrales ne portent que sur les supports surfaciques S_F et S_C et éliminer ainsi toutes les contraintes dues à la représentation sur la frontière infinie $\partial\Omega_o$, il est recommandé d'utiliser les solutions fondamentales de Mindlin. Le grand avantage reste une optimisation des temps de calcul et une facilité dans la définition des maillages.

VII.2.1 Les solutions fondamentales de Mindlin

Les solutions fondamentales relatives à l'espace *semi-infini* sont obtenues par superposition des solutions de Kelvin et celles du problème de Boussinesq-Cerruti. Nous définissons \mathbf{x}^* comme étant le point *symétrique* du point d'application de la force \mathbf{x} par rapport $\partial\Omega$ (plan $y_3 = 0$). Posons alors que R est la distance euclidienne entre les points \mathbf{y} et \mathbf{x}^* , $R = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\|$.

Les solutions fondamentales complètes en déplacements et en contraintes pour le demi-espace, explicitées dans [6], sont donc données par :

$$\bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \check{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{VII.1})$$

$$\bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \check{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{VII.2})$$

La solution $U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont les solutions de Kelvin en déplacements respectivement en contraintes données par (II.13) et (II.14). Les solutions fondamentales complémentaires $\check{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\check{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sous leurs formes explicites sont données en annexe D.

Nous rencontrerons deux situations de natures différentes selon que la cavité souterraine touche la surface libre ou pas.

LA CAVITÉ SOUTERRAINE N'ATTEINT PAS LA SURFACE LIBRE.

Pour tout $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ c'est à dire que $S_C \cap \partial\Omega \equiv \emptyset$, et quand $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, seules les solutions de Kelvin $U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont singulières, étant donné que dans ce cas précis, il n'y a que la distance r qui s'annule. Ainsi, nous incorporerons les décompositions (VII.1) et (VII.2) dans les expressions des formes bilinéaires présentes dans les formulations variationnelles symétriques de Galerkin. Les noyaux des intégrales singulières sont donc donnés par les solutions élémentaires singulières de Kelvin et les intégrales sont évaluées dans ce cas en appliquant les procédures d'intégration singulière exposées dans les précédents chapitres. Les doubles intégrales contenant les solutions complémentaires $\check{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\check{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ demeurent régulières.

LA CAVITÉ SOUTERRAINE ATTEINT LA SURFACE LIBRE.

Dans le cas où le point $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, chacune des solutions élémentaires de Kelvin ainsi que les complémentaires deviennent singulières. On appliquera dans ce cas les procédures d'intégration singulière exposées jusqu'à présent pour l'évaluation des solutions de Kelvin et les solutions complémentaires. Le tenseur B_{ikqs} donné par (II.53) est remplacé par :

$$\bar{B}_{ikqs} = B_{ikqs} + \check{B}_{ikqs} \quad (\text{VII.3})$$

dans la forme bilinéaire portant sur la surface S_c de la cavité. Le tenseur \check{B}_{ikqs} associé à la partie complémentaire de la solution de Mindlin, a été récemment développé par Mear [53].

VII.3 Demi-espace à surface partiellement libre

Revenons au cas où l'on a creusé à la frontière $\partial\Omega$ du demi-espace chargé partiellement. L'effet de la fondation sur le demi-espace est représenté par l'application du chargement \bar{P} . Dans ce cas essayons d'écrire les nouvelles expressions des intégrales variationnelles symétriques de Galerkin, décrivant ce problème.

VII.3.1 Formulations intégrales variationnelles du problème

STATIONNARITÉ DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE.

Soit la surface $S_c = S_T \cup S_u$, et tenons compte de l'effet de la surcharge \bar{P} à la surface libre pour écrire alors la condition de stationnarité de l'énergie potentielle comme suit :

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{u}).\delta\mathbf{u} = & \int_{S_u} \mathbf{u}^D.T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS + \int_{S_T} \mathbf{u}.T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS - \int_{S_T} \mathbf{t}^D.\delta\mathbf{u} \, dS \\ & - \int_{S_u} \mathbf{t}.\delta\mathbf{u} \, dS - \int_{S_F} \bar{\mathbf{p}}.\delta\mathbf{u} \, dS + \int_{S_F} \mathbf{v}.T^n(\delta\mathbf{u}) \, dS = 0 \quad (\text{VII.4}) \end{aligned}$$

\mathbf{v} étant le déplacement sur la surface S_F .

FONCTIONS TEST EN DÉPLACEMENT.

$$\delta u_k(\mathbf{x}) = \int_{S_T} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) \bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_y - \int_{S_u} \tilde{t}_i(\mathbf{y}) \bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_y - \int_{S_F} \tilde{p}_i(\mathbf{y}) \bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_y \quad (\text{VII.5})$$

FONCTIONS TEST EN CONTRAINTES.

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{klab} \int_{S_T} \tilde{u}_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_b} \bar{\Sigma}_{ij}^a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y - \int_{S_u} \tilde{t}_k(\mathbf{y}) \bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y \\ - \int_{S_F} \tilde{p}_i(\mathbf{y}) \bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \quad (\text{VII.6}) \end{aligned}$$

Nous avons défini $\tilde{\mathbf{p}}$ comme étant le saut $(\delta\mathbf{p}^+ - \delta\mathbf{p}^-)$ à travers la surface S_F . En particulier, on remarque que pour tout point \mathbf{x} de S_F , les propriétés de la solution fondamentale de Mindlin entraînent que :

$$T_i^n(\delta\mathbf{u})(\mathbf{x}) \equiv \delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = -\tilde{p}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{VII.7})$$

La substitution de (VII.5) et (VII.6) dans (VII.4) et en tenant compte de (VII.7), nous conduit à écrire les formulations intégrales symétriques, pour le problème aux limites mixtes considéré comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}_{pu}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathfrak{S}_u(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) + \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) + \mathcal{B}_{pt}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathfrak{S}_t(\tilde{\mathbf{t}}) \\ \mathcal{B}_{up}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}) + \mathcal{B}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) + \mathcal{B}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \mathfrak{S}_t(\tilde{\mathbf{t}}) + \mathcal{D}_{vp}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{p}}) \end{cases} \quad (\text{VII.8})$$

Les différentes formes bilinéaires qui interviennent dans la formulation ainsi écrite et qui sont dûes à la présence de la charge \bar{P} à la surface du demi-espace sont données par :

$$\mathcal{B}_{pu}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_F} \int_{S_T} \bar{p}_k(\mathbf{x}) [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.9})$$

$$\mathcal{B}_{pt}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{t}}) = \int_{S_F} \int_{S_u} \bar{p}_k(\mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) \bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.10})$$

$$\mathcal{B}_{up}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}) = - \int_{S_F} \tilde{p}_k(\mathbf{y}) \int_{S_T} [u_i(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \quad (\text{VII.11})$$

$$\mathcal{B}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) = \int_{S_F} \int_{S_u} \tilde{p}_i(\mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) \bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.12})$$

$$\mathcal{B}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \int_{S_F} \int_{S_F} \tilde{p}_i(\mathbf{y}) \bar{p}_k(\mathbf{x}) \bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.13})$$

De la même manière nous définissons les différentes formes linéaires présentes dans (VII.8) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_p(\tilde{\mathbf{p}}) &= \int_{S_F} \tilde{p}_k(\mathbf{y}) \int_{S_u} [u_i^D(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \\ &\quad - \int_{S_T} t_k^D(\mathbf{x}) \int_{S_F} \tilde{p}_k(\mathbf{y}) \bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \\ \mathcal{D}_{vp}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{p}}) &= \int_{S_F} v_i(\mathbf{x}) \tilde{p}_i(\mathbf{x}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{VII.14})$$

Les autres formes bilinéaires et linéaires non explicitement définies dans cette section, sont formellement identiques à celles données dans (II.66) – (II.71) du chapitre (II), mais sont maintenant définies en termes de la solution fondamentale de Mindlin.

VII.3.2 Couplage avec les éléments finis

PROBLÈME DE NEUMANN.

Dans ce cas nous avons $S_T = S_c$ et $S_u = \emptyset$

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{B}}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) + \bar{\mathcal{B}}_{pu}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = -\mathcal{D}_{tu}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{u}}) \\ \bar{\mathcal{B}}_{up}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}) + \bar{\mathcal{B}}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) + \bar{\mathcal{B}}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \mathcal{D}_{vp}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{p}}) \end{cases} \quad (\text{VII.15})$$

PROBLÈME DE DIRICHLET.

Dans ce cas, nous avons $S_u = S_c$ et $S_T = \emptyset$

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{B}}_{ut}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) + \bar{\mathcal{B}}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) + \bar{\mathcal{B}}_{pt}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{t}}) = 0 \\ \bar{\mathcal{B}}_{up}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}) + \bar{\mathcal{B}}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) + \bar{\mathcal{B}}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \mathcal{D}_{vp}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{p}}) \end{cases} \quad (\text{VII.16})$$

Les formes bilinéaires et linéaires présentes dans les problèmes de Neumann et de Dirichlet décrits ci dessus sont les suivantes :

$$\mathcal{B}_{pu}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_F} \int_{S_c} \bar{p}_k(\mathbf{x}) [\tilde{u}_i(\mathbf{y}) - \tilde{u}_i(\mathbf{x})] n_j(\mathbf{y}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.17})$$

$$\mathcal{B}_{pt}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{t}}) = \int_{S_F} \int_{S_c} \bar{p}_k(\mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.18})$$

$$\mathcal{B}_{up}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}) = - \int_{S_F} \tilde{p}_k(\mathbf{y}) \int_{S_c} [u_i(\mathbf{x}) - u_i^D(\mathbf{y})] n_j(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_x dS_y \quad (\text{VII.19})$$

$$\mathcal{B}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) = \int_{S_F} \int_{S_c} \tilde{p}_i(\mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.20})$$

$$\mathcal{B}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = \int_{S_F} \int_{S_F} \tilde{p}_i(\mathbf{y}) \bar{p}_k(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \quad (\text{VII.21})$$

$$\mathcal{D}_{vp}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{p}}) = \int_{S_F} v_i(\mathbf{x}) \tilde{p}_i(\mathbf{x}) dS_x \quad (\text{VII.22})$$

CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ.

$$W_{def}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV \quad (\text{VII.23})$$

$$= \int_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS + \int_{S_F} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{p}} dS \quad (\text{VII.24})$$

$$= W_F \quad (\text{VII.25})$$

Nous identifions le deuxième terme de la précédente équation à l'énergie de frontière W_F du domaine. Il reste à exprimer $W_F = W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et nous écrivons que si l'on considère la combinaison ((VII.15a) -(VII.15b)-(VII.16a)) nous déduisons que :

$$-2W_F = \mathcal{B}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{B}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) - \mathcal{B}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) - \mathcal{B}_{pt}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{t}}) - \mathcal{B}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) \quad (\text{VII.26})$$

et sous sa forme discrétisée :

$$-2\bar{W}_F = \bar{\mathcal{B}}_{uu}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) - \bar{\mathcal{B}}_{pp}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) - \bar{\mathcal{B}}_{tp}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{p}}) - \bar{\mathcal{B}}_{pt}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{t}}) - \bar{\mathcal{B}}_{tt}(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}}) \quad (\text{VII.27})$$

Posons que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$ et $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$ et soient \mathbf{F} et \mathbf{d} deux vecteurs tels que :

$$\mathbf{F}^T = \langle \mathbf{p} \ \mathbf{t} \rangle$$

et

$$\mathbf{d}^T = \langle \mathbf{u} \ \mathbf{v} \rangle$$

Exprimons alors la relation qui existe entre \mathbf{F} et \mathbf{d} , faisons alors la sommation de (VII.16a) et (VII.16b), nous écrivons à ce moment que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{d} \quad (\text{VII.28})$$

où les matrices \mathbf{M} et \mathbf{E} sont données comme suit :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}_{pp} & \bar{\mathcal{B}}_{tp} \\ \bar{\mathcal{B}}_{pt} & \bar{\mathcal{B}}_{tt} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.29})$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathcal{B}}_{up} & -\bar{\mathcal{D}}_{vp} \\ -\bar{\mathcal{B}}_{ut} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.30})$$

On pose alors que l'équation (VII.27) se met sous la forme :

$$2W_F = \mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F} - \mathbf{u}^T \mathbf{B}_{uu} \mathbf{u} \quad (\text{VII.31})$$

$$= \mathbf{d}^T [\mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E}] \mathbf{d} - \mathbf{u}^T \mathbf{B}_{uu} \mathbf{u} \quad (\text{VII.32})$$

$$= \mathbf{d}^T [\mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} - \mathbf{L}] \mathbf{d} \quad (\text{VII.33})$$

avec

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.34})$$

$$W_F = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_{SE} \mathbf{d} \quad (\text{VII.35})$$

La matrice de rigidité du super élément intégral représentant un semi-espace avec une cavité de surface S_c est donnée par :

$$\mathbf{K}_{SE} = [\mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} - \mathbf{L}] \quad (\text{VII.36})$$

La matrice de rigidité du super élément intégral \mathbf{K}_{SE} est symétrique et présente une forme similaire à celle donnée en (III.24).

VII.4 Conclusion

Une formulation intégrale variationnelle a été proposée pour l'étude d'un domaine semi-infini à surface partiellement libre et contenant une zone de non linéarités. Cette dernière est traitée par éléments finis. L'utilisation des solutions fondamentales de Mindlin permettent, dans le cas de la modélisation d'un espace *semi-infini*, de réduire les supports géométriques à discrétiser dans le domaine éléments de frontière. Les représentations intégrales ne porteront dans ce cas que sur des surfaces bornées évitant ainsi toutes les contraintes liées à des représentations sur des surfaces illimitées et s'étendant jusqu'à l'infini. En plus de la facilité qu'on peut rencontrer dans la génération de maillages, le gain en temps de calcul est substantiel. La mise en oeuvre de la matrice de rigidité ainsi construite reste une perspective à nos travaux et nous espérons réaliser une application réelle sur un problème de géotechnique.

Chapitre VIII

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire une formulation symétrique pour le couplage mécanique entre la méthode des éléments de frontière et celle des éléments finis, dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle. Cette procédure de couplage s'appuie sur l'adaptation des méthodes intégrales variationnelles symétriques de Galerkin entièrement régularisées, à la construction d'une matrice de rigidité symétrique d'un *super-élément intégral*, représentant un domaine élastique sans forces de volume.

Le développement d'un tel outil numérique entièrement bâti sur les concepts de la méthode des éléments de frontière par approche de Galerkin, qui sont moins classiques et surtout plus délicats à mettre en oeuvre que ceux de l'approche par collocations, ainsi que son implantation dans les environnements éléments finis de CAST3M ont permis de mettre en évidence l'aspect de complémentarité de la méthode des *éléments de frontière* et celle des *éléments finis*.

La concrétisation de l'aspect de symétrie des formulations intégrales de Galerkin a été aussi au premier rang de nos préoccupations. A cet effet, un nouveau schéma d'intégration singulière respectant parfaitement la symétrie des formulations mises en jeu a été développé, et a permis non seulement d'améliorer d'une manière significative la précision des résultats obtenus mais aussi de réduire le temps CPU. Certes, des améliorations devraient être apportées en vue d'optimiser la phase d'intégration et de mieux cerner les performances des méthodes intégrales de Galerkin.

La procédure de couplage symétrique développée dans le cadre de ce travail est opérationnelle dans CAST3M, comme l'attestent les différents exemples de validation présentés dans le cadre de ce mémoire. Un éventail très large des champs d'application reste à explorer : *propagation de fissures, interaction sol-structure, problème élastoplastique en milieu infini...* etc. L'efficacité de la méthode à traiter ce dernier problème cité, a déjà été démontrée à travers l'exemple de la cavité élastoplastique en milieu infini.

Comme nous avons jeté les premières bases pour l'adaptation de la méthode au traitement

des problèmes de la mécanique de la rupture. Nous avons en effet, donné une extension aux formulations intégrales variationnelles existantes pour prendre compte de la présence d'une fissure dans le solide. Nous avons proposé ce travail comme une alternative à l'application directe des méthodes intégrales par *collocations* qui conduit à la dégénérescence de la formulation numérique. Nous avons par ailleurs pu réaliser une étude sur un barreau cylindrique fissuré grâce à la construction et à l'implantation numérique du macro-élément fissuré ainsi que le développement d'un élément spécial (élément avec noeud au quart) en pointe de fissure. La mise au point d'un tel outil de calcul représente un grand intérêt pour l'étude de la propagation de fissure où il est particulièrement aisé de procéder à des remaillages surfaciques par éléments de frontière.

L'extension des formulations intégrales variationnelles de Galerkin à l'étude des domaines semi-infinis contenant une zone de non linéarité, a été également proposée dans le cadre de ce travail. Dans cette étude nous montrons clairement comment, moyennant l'utilisation des solutions fondamentales de Mindlin, les représentations intégrales décrivant ce type de problème ne portent que sur des surfaces bornées, évitant ainsi toutes les contraintes liées à l'utilisation des représentations intégrales sur des surfaces s'étendant jusqu'à l'infini. L'étude a par contre, été limitée à une étude analytique sans toutefois aller jusqu'à l'implantation numérique. Nous espérons aboutir rapidement à des résultats numériques convainquants et de procéder à une application simple sur un problème concret de la géotechnique.

Nous sommes bien convaincus qu'il reste à améliorer la gestion des messages d'erreurs pour créer plus de convivialité entre le code CAST3M et son utilisateur. Il convient également d'incorporer les éléments triangulaires afin d'élargir les possibilités dans la définition des différents maillages.

En conclusion, nous émettons le souhait que ce présent travail puisse doter la prochaine version du code CAST3M, d'un outil de modélisation mécanique supplémentaire qui permettra à l'utilisateur de profiter des nombreux avantages des *méthodes intégrales* et ceux de la *méthode des éléments finis*.

Bibliographie générale

- [1] ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P. *Numerical fracture mechanics*. Comp. Mech. Publ., Southampton and Kluwer Academic Press (1991).
- [2] ANDRÄ, H., SCHNACK, E. Integration of singular Galerkin-type boundary element integrals for 3D elasticity problems. *Numerische Mathematik*, **76**, 143–165 (1997).
- [3] AUBRY, D., CLOUTEAU, D. A subdomain approach to dynamic soil-structure interaction. In V. Davidovici and R.W. Clough (ed.), *Recent advances in earthquake engineering and structural dynamics*, pp. 251–272. Ouest Editions/AFPS, Nantes (1992).
- [4] AUBRY, D., CLOUTEAU, D., DOMPIERRE, J., SVAY, J. The seismic borehole problem, a mixed BEM-FEM modal approach in the frequency domain. In *Proc. Numerical Methods in Engineering'92*, Brussels (1992).
- [5] BALAKRISHNA, C., GRAY, L J, KANE, J H. Efficient analytical integration of symmetric Galerkin boundary integrals over curved elements: elasticity formulation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **117**, 157–179 (1994).
- [6] BALAS, J., SLADEK, J., SLADEK, V. *Stress analysis by boundary element methods*. Elsevier (1989).
- [7] BANERJEE, P. K., BUTTERFIELD, R. *Boundary element methods in engineering sciences*. McGraw Hill, London (1981).
- [8] BATOZ, J. L., DHATT, G. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, Paris (1990).
- [9] BEER, G. Finite element boundary element and coupling analysis of unbounded problems in elastostatics. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **19**, 567–580 (1983).
- [10] BEER, G., MEEK, J. L. The coupling of boundary and finite element method for infinite domain problems in elasticity. In C.A. Brebbia (ed.), *Boundary element method*, pp. 575–591. Springer-Verlag (1981).

- [11] BELYTSCHKO, T, CHANG, H S, LU, Y Y. A variationally coupled finite element-boundary-element method. *Computers and Structures*, **33**, 21–29 (1989).
- [12] BELYTSCHKO, T, LU, Y Y. Singular integration in variationally coupled FE-BE method. *J. Engng. Math.*, **117**, 820–835 (1991).
- [13] BELYTSCHKO, T, LU, Y Y. A variationally coupled FE-BE method for transient problem. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **37**, 91–104 (1994).
- [14] BETTESS, P. *Infinite elements*. Penshaw Press (1992).
- [15] BLANDFORD, G. E., INGRAFFEA, A. R., LIGGETT, J. A. Two dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **17**, 387–404 (1981).
- [16] BONNET, M. *Equations intégrales et éléments de frontière..* CNRS Editions / Eyrolles, Paris, France (1995).
- [17] BONNET, M. Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 93–102 (1995).
- [18] BONNET, M. *Boundary integral equations methods for Solids and Fluids*. John Wiley and sons (1999).
- [19] BONNET, M. communication personnelle (2000).
- [20] BONNET, M., MAIER, G., POLIZZOTTO, C. On symmetric galerkin boundary element method. *Appl. Mech. Rev.*, **51**, 669–704 (1998).
- [21] BONNET, M., MUKHERJEE, S. Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Struct.*, **33**, 4461–4480 (1996).
- [22] BOUSSEKINE, A. *Etude de la propagation de fissures par la méthode des éléments de frontière*. Thèse de Doctorat, Université de limoges, France (1994).
- [23] BREBBIA, C. A., GREGORIOU, P. Combination of boundary and finite elements for elastostatics. *Appl. Math. Modelling*, **3**, 212–220 (1979).
- [24] BUI, H. D. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson (1978).
- [25] BURGARDT, B. *Contrubution à l'étude des méthodes des équations intégrales et à leur mise en oeuvre numérique en élastoplasticité*. Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Nantes, France (1999).

- [26] CAPERAA, S. *Modélisation des interfaces et des singularités dans les structures par couplage entre éléments finis et équations intégrales de frontières*. Thèse de Doctorat, Université de Limoges, France (1985).
- [27] CAPERAA, S., ULMET, L. Equations intégrales en élasticité: développement d'un macro élément à contour ouvert. Rapport n^o 84-f-1016, MIR (1986).
- [28] CLOUTEAU, D. *Propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes. Application à la tenue des ouvrages sous séismes*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, France (1990).
- [29] CLOUTEAU, D., AUBRY, D. 3D seismic Soil-fluid-structure interaction for arch dams including source and site effects. In *Proc. of Eurodyn93 Int. Conf.*, pp. 1217–1224, Rotterdam (1993). Balkema.
- [30] COSTABEL, M. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements. In W L Wendland C A Brebbia, G Kuhn (eds.), *Boundary Elements IX*, pp. 414–420. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).
- [31] COSTABEL, M, STEPHAN, E P. Coupling of finite and boundary elements methods for elastoplastic interface problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, **27**, 1212–1226 (1990).
- [32] CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **10**, 301–343 (1976).
- [33] CRUSE, T. A. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers (1988).
- [34] DANGLA, P. *Couplage éléments finis – équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France (1989).
- [35] DAVIS, J. J., RABINOWITZ, P. *Methods of numerical integration*. Academic Press (1975).
- [36] DHATT, G., TOUZOT, G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S. A., Paris (1984).
- [37] GRAY, L. J., CHINTA, B., KANE, J. H. Symmetric Galerkin fracture analysis. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 103–109 (1995).
- [38] GUIGGIANI, M. Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **14**, 169–179 (1994). (invited paper, special issue).

- [39] HAAS, M, KUHN, G. A symmetric Galerkin BEM implementation for 3D elastostatic problems with an extension to higher-order elements. In A. Carini (ed.), *IABEM 2000, Brescia (Italie)*, pp. 125–127 (2000).
- [40] HSIAO, G C. The coupling of boundary element and finite element methods. *Z. Angew. Math. Mech.*, **70**, 493–503 (1990).
- [41] KANARACHOS, A., PROVATIDIS, CH. On the symmetrization of the BEM formulation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **71**, 151–165 (1988).
- [42] KANE, J. H., BALAKRISHNA, C. Symmetric Galerkin boundary formulations employing curved elements. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **36**, 2157–2187 (1993).
- [43] KARAMANLIDIS, D. On a modified Hellinger-Reissner variational theorem for the analysis of elastoplastic solids. *Trans. of ASME*, **55**, 536–538 (1988).
- [44] KELLY, D. W., MUSTOE, G. G. W., ZIZNIEWICZ, O. C. Coupling boundary element with other numerical methods. In P. K. Banerjee, R. Butterfield (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*, vol. 1. Applied science (1979).
- [45] KOLINO, K., TSUWADA, T., SETO, H., TANAKA, M. Hybrid stress analysis of boundary and finite elements by superelement method. In J J Connor C A Brebbia (ed.), *Advances in Boundary Elements*, pp. 27–38. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1989).
- [46] KRISHNASAMY, G., RIZZO, F. J., RUDOLPHI, T. J. Hypersingular boundary integral equations: their occurrence, interpretation, regularization and computation. In P. K. Banerjee, S. Kobayashi (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*, vol. 7: Advanced Dynamic Analysis, chap. 7. Elsevier (1992).
- [47] LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **10**, 991–1005 (1976).
- [48] LI, H. B., HAN, G. M., MANG, H. A., TORZICKI, P. A new method for the coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **54**, 161–185 (1986).
- [49] LI, S., MEAR, M. E. Singularity-reduced integral equations for displacement discontinuities in three-dimensional linear elastic media. *Int. J. Fract.*, **93**, 87–114 (1999).
- [50] LI, S., MEAR, M. E., XIAO, L. Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **151**, 435–459 (1998).

- [51] MAIER, G. On elastoplastic analysis by boundary elements. *Mech. Res. Commun.*, **10**, 45–52 (1983).
- [52] MAIER, G., POLIZZOTTO, C. A Galerkin approach to boundary element elastoplastic analysis. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **60**, 175–194 (1987).
- [53] MEAR, M. Communication privée (2000).
- [54] MI, Y., ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In J. Dominguez C. A. Brebbia, F. Paris (eds.), *Boundary Elements XIV*, pp. 315–329. Comp. Mech. Publ., Southampton (1992).
- [55] MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, **7**, 195–201 (1936).
- [56] MURA, T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff (1982).
- [57] NEDELEC, J-C. Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces in \mathbb{R}^3 . *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **8**, 61–80 (1976).
- [58] NEDELEC, J. C. Approximation des équations intégrales en physique et en mécanique. Notes de cours, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1977).
- [59] POLIZZOTTO, C. An energy approach to the boundary element method; Part II: Elastic-plastic solids. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **69**, 263–276 (1988).
- [60] PORTELA, A., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P. Dual boundary element method: efficient implementation for cracked problems. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **33**, 1269–1287 (1992).
- [61] REZAYAT, M., SHIPPY, D. J., RIZZO, F. J. On time-harmonic elastic wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **55**, 349–367 (1986).
- [62] SALENCON, J. *Mécanique des milieux continus (vols. 1,2,3)*. Presses de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1992).
- [63] SAUTER, S. A., LAGE, C. Transformation of hypersingular integrals and black-box cubature. Tech. rep., Technical Report n° 97-17, Universität kiel (1997).
- [64] SIRTORI, S. General stress analysis method by means of integral equations and boundary elements. *Meccanica*, **14**, 210–218 (1979).

- [65] SIRTORI, S., MAIER, G., NOVATI, G., MICCOLI, S. A Galerkin symmetric boundary element method in elasticity: formulation and implementation. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **35**, 255–282 (1992).
- [66] SIRTORI, S., MICCOLI, S., KORACH, E. Symmetric coupling of finite elements and boundary elements. In J. H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, S. N. Atluri (eds.), *Advances in Boundary Element Techniques*, pp. 407–427. Springer-Verlag (1993).
- [67] STROUD, A. H., SECREST, D. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall (1966).
- [68] TADA, H., PARIS, P., IRWIN, G. The stress analysis of cracks handbook. Tech. rep., Del. Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, USA (1973).
- [69] TANAKA, M., SLADEK, V., SLADEK, J. Regularization techniques applied to boundary element methods. *Appl. Mech. Rev.*, **47**, 457–499 (1994).
- [70] TULLBERG, O., BOLTEUS, L. A critical study of different boundary element stiffness matrices. In C.A. Brebbia (ed.), *Boundary element methods in engineering*, pp. 621–635. Springer-Verlag (1982).
- [71] ULMET, L. *Perturbations du champ mécanique d'un matériau par la présence d'hétérogénéités : modélisation des contacts par éléments de frontière*. Thèse de Doctorat, Université de Limoges, France (1989).
- [72] ULMET, L. A boundary element method for stress analysis of bolted joints in structures. In *Computational Mechanics Publications*. Elsevier applied science (1990).
- [73] ULMET, L. Développement d'un code éléments de frontière en élasticité 3D. Rapport interne n° 8, Laboratoire de Génie Civil d'Egletons (1997).
- [74] VOLAIT, F. *Calcul d'un super-élément par une méthode d'équation intégrale*. Thèse de Doctorat, Université de Compiègne, France (1980).
- [75] XIAO, L. *Symmetric weak-form integral equation method for three dimensional fracture analysis*. Thèse de Doctorat, University of Texas at Austin (1998).
- [76] ZENG, X., BIELAK, J. Stable symmetric finite element - boundary integral coupling methods for fluid-structure interface problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 79–91 (1995).
- [77] ZENG, X., BIELAK, J., MACCAMY, R. C. Unified symmetric finite element and boundary integral variational coupling methods for linear fluid-structure interaction. *Num. Meth. Partial Diff. Eq.*, **8**, 451–467 (1992).

-
- [78] ZENG, X, ZHAO, F. A coupled FE and boundary integral equation method based on exterior domain decomposition for fluid-structure interface problems. *Int. J. Solids Struct.*, **31**, 1047–1061 (1994).
- [79] ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method: Basic Concepts and Linear Applications*. McGraw Hill, fourth edn. (1989).
- [80] ZIENKIEWICZ, O C, KELLY, D W, BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **11**, 355–375 (1977).
- [81] ZIENKIEWICZ, O C, KELLY, D W, BETTESS, P. Mariage à la mode - The best of both worlds (finite elements and boundary integrals) (1977). (Int. symp. On innovative numerical analysis in applied engineering science, Versailles, France).

Annexe A

Expression du rotationnel surfacique

L'opérateur du rotationnel surfacique introduit initialement par [58]. Considérons alors le champ des déplacements \mathbf{u} , le rotationnel surfacique qui lui est associé s'écrit alors :

$$(Ru)_{iq}(\mathbf{y}) = e_{jfq} n_j u_{i,f}(\mathbf{y}) \quad (\text{A.1})$$

Avec :

$$u_{i,f}(\mathbf{y}) = \frac{\partial u_i}{\partial y_f} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \mathbf{a}_1 + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \mathbf{a}_2 \quad (\text{A.3})$$

D'autre part la normale unitaire \mathbf{n} et l'élément d'aire dS au point $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$ d'un élément de surface sont données par la théorie des surfaces :

$$dS = J(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad \boldsymbol{\xi} \in [-1, 1]^2 \quad (\text{A.4})$$

$$n_j = \frac{1}{J} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)_j = \frac{1}{J} e_{jab} (\mathbf{a}_1)_a (\mathbf{a}_2)_b \quad (\text{A.5})$$

où $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ sont les vecteurs de la base naturelle du plan tangent à l'élément de frontière $E(\mathbf{y})$ au point $\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$. Nous avons :

$$(\mathbf{a}_\alpha) = \sum_{m=1}^{N_e} N_{m,\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}^m \quad (\text{A.6})$$

ce qui nous permet de poser que :

$$\begin{aligned}
 e_{jfq} n_j &= \frac{1}{J} e_{jfq} e_{jab} (\mathbf{a}_1)_a (\mathbf{a}_2)_b \\
 &= \frac{1}{J} (\delta_{fa} \delta_{qb} - \delta_{fb} \delta_{qa}) (\mathbf{a}_1)_a (\mathbf{a}_2)_b \\
 &= \frac{1}{J} [(\mathbf{a}_1)_f (\mathbf{a}_2)_q - (\mathbf{a}_1)_q (\mathbf{a}_2)_f] \\
 e_{jfq} n_j u_{i,f}(\mathbf{x}) dS &= \left[\frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} (\mathbf{a}_2)_q - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} (\mathbf{a}_1)_q \right] d\xi_1 d\xi_2 \\
 &= \sum_{m=1}^{N_e} \left[\frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} (\mathbf{a}_2)_q - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} (\mathbf{a}_1)_q \right] u_i^m d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

or

$$(\mathbf{a}_\alpha)_q = (\mathbf{a}_\alpha \mathbf{e}_q) \quad \text{avec} \quad q = 1, 3 \quad (\text{A.7})$$

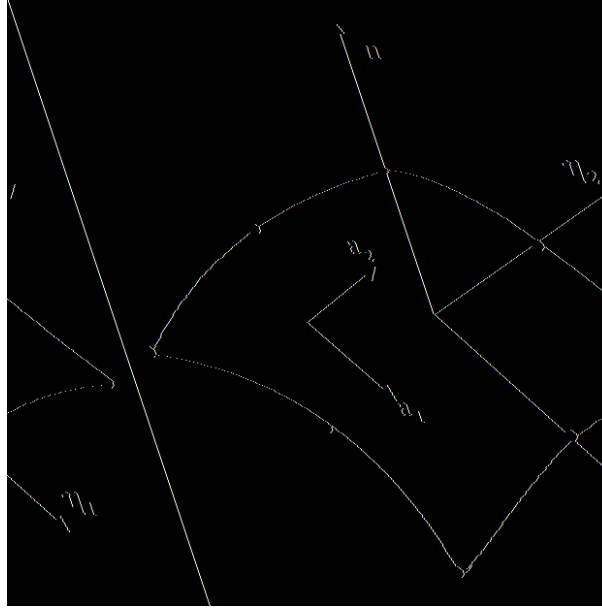


Figure A.1 : Définition de la base naturelle du plan tangent \mathbf{a}_α

Annexe B

Régularisation de premier ordre

RÉGULARISATION DE PREMIER ORDRE

Ce processus de régularisation se base sur un passage à la limite en indentant le domaine Ω de la singularité et sur la connaissance d'une solution particulière vérifiée par les solutions élémentaires, à savoir l'*identité de corps rigide* pour préparer ce processus de passage à la limite.

Identité de corps rigide

Considérons un solide borné Ω qui subit une translation rigide \mathbf{u}^0 avec forces de volume nulles. Cet état élastostatique ainsi défini vérifie les équations de l'équilibre élastique définies en (II.4), (II.5) et (II.6). La formule de représentation intégrale (II.18) lui est ainsi appliquée de façon à formuler l'écriture de l'*identité de corps rigide* suivante :

$$\kappa u_k^0 + u_i^0 \int_{\partial\Omega} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = 0 \quad (\text{B.1})$$

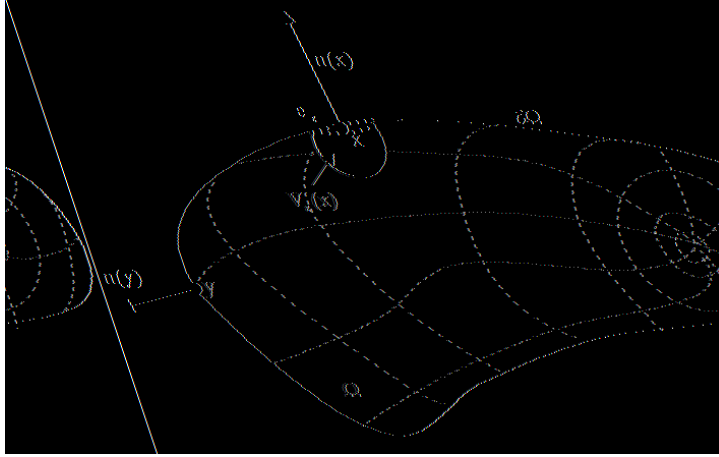
Nous pouvons aussi écrire la précédente relation pour une valeur particulière $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, nous écrivons :

$$\kappa u_k(\mathbf{x}) + u_i(\mathbf{x}) \int_{\partial\Omega} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = 0 \quad (\text{B.2})$$

Retranchons l'identité écrite ci dessus à la formule de représentation intégrale (II.18):

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y = 0 \quad (\text{B.3})$$

A ce stade de démonstration, cette relation reste valable pour tout point source \mathbf{x} non situé sur la frontière du domaine.

Figure B.1 : Indentation du domaine Ω lors du passage à la limite

PASSAGE À LA LIMITE.

Pour ce faire, \mathbf{x} fixé étant choisi sur la frontière, l'approche classique consiste à introduire, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, un *voisinage d'exclusion* sphérique $B_\varepsilon(\mathbf{x})$, boule de centre \mathbf{x} et de rayon ε et on pose $\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon(\mathbf{x})$, $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$, $e_\varepsilon = \partial\Omega \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega - e_\varepsilon + s_\varepsilon$. Par construction, $\mathbf{x} \notin \partial\Omega_\varepsilon$, on étudie donc la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ de l'équation (B.3) écrite pour le domaine Ω_ε de frontière $(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$.

$$\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y = 0 \quad (\text{B.4})$$

supposons donc que $u_i \in C^{0,\alpha}$ en \mathbf{x} . Alors, compte tenu des propriétés de singularité suivantes pour r infiniment petit :

$$U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O(1/r)$$

$$\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O(1/r^2)$$

on peut poser que :

$$[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\alpha-2} \quad (\text{B.5})$$

On peut à ce stade de raisonnement examiner le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ en considérant les intégrales sur s_ε et sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ séparément :

♦ **Intégrale sur s_ε :**

Tenons compte de (B.5) et du fait que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \sim \varepsilon$, $dS_y \sim \varepsilon^2 d\Omega$ (Ω n'est autre que l'angle

solide vu du point \mathbf{x}), on peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} [u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &\sim \varepsilon^\alpha d\Omega \\ t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &\sim \varepsilon^\alpha d\Omega \end{aligned}$$

et donc :

$$\{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y = O(\varepsilon^\alpha) d\Omega \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} [u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &= 0 \end{aligned}$$

◇ **Intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$**

Au voisinage de \mathbf{x} , nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} [u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\sim \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\alpha-2} \\ t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\sim \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ admet une limite, qui n'est autre que l'intégrale *impropre* correspondante sur Ω . Nous posons alors que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y \\ = \int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

et finalement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y = \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{B.8})$$

ce qui nous conduit à écrire l'équation *intégrale de frontière régularisée en déplacement* comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})] T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y = \int_{\Omega} b_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (\text{B.9})$$

Cette dernière égalité relie les valeurs des variables en déplacements \mathbf{u} et en tensions \mathbf{t} uniquement sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine et fait intervenir des intégrales convergentes et présentant des singularités intégrables en $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Il est clairement démontré lors de ce processus de régularisation que les déplacements \mathbf{u} doivent être de continuité $C^{0,\alpha}$ (*continuité au sens d'Hölder*), ce qui ne pose aucune difficulté de mise en oeuvre numérique de l'équation intégrale en déplacements.

Détails de programmation de l'opérateur EIVAR

Le code source du code CAST3M est écrit en ESOPE et est traduit dans un premier temps en FORTRAN 77 avant d'être envoyé en compilation. Le macro-langage GIBIANE constitue l'interface qui permet à l'utilisateur de communiquer directement avec le programme. Un opérateur de CAST3M crée un ou plusieurs objets. L'utilisation d'un opérateur de CAST3M s'écrit alors :

Résultat=OPÉRATEUR Opérandes

Les Opérandes forment l'ensemble des structures d'informations concernées par l'opérateur. Nous avons adopté la même démarche pour introduire l'opérateur EIVAR.

C. 1 L'opérateur EIVAR

EIVAR, implanté dans CAST3M, est un opérateur qui calcule la matrice de rigidité d'un domaine tridimensionnel en élastostaticité à l'aide de la méthode des éléments de frontière symétrique de Galerkin. La matrice de rigidité résultante \mathbf{K}_{SE} est symétrique. Les différentes étapes de programmation menant à la construction d'une telle matrice seront exposées dans cette annexe. L'insertion d'un tel opérateur dans un code aux éléments finis CAST3M a permis de bénéficier des environnements graphiques de ce dernier, disposant de mailleur automatique, cartographie de contraintes, etc... Nous nous sommes donc abstenus de développer de tels utilitaires pour nous consacrer uniquement à ce qui a constitué le coeur de notre travail. L'opérateur EIVAR ainsi construit présente deux aspects majeurs qui peuvent être résumés comme suit :

- ◊ L'opérateur EIVAR évalue la matrice de rigidité d'un domaine présentant une ou plusieurs surfaces. Cet aspect peut être bien exploité dans le traitement de domaines multizones où les matériaux les constituant renferment des hétérogénéités de tailles, de formes et de dispositions variables.

- ◊ L'opérateur EIVAR évalue la matrice de rigidité d'un domaine fini ou infini. A l'appel de l'opérateur, il suffit de lui communiquer le mot clé INFI pour les domaines infinis, le mot clé EXTE s'il s'agit d'un domaine extérieur à la surface et INTE s'il s'agit d'un domaine intérieur à la surface.

C. 1.1 Syntaxe d'appel

Dans le cas d'un domaine fini multi-surfaces, de surfaces intérieure SURF1 et extérieure SURF2, nous écrivons la synthaxe d'appel suivante :

```
RIG1= EIVAR SURF1 'INTE' 'AUTO' SURF2 'EXTE' 'AUTO' ('MANU' PO);
RIG1= EIVAR SURF1 'INTE' 'AUTO' SURF2 'INFI' 'AUTO' ('MANU' PO);
```

- RIG1 : résultat de type *RIGIDITÉ*, il désigne la rigidité du super-élément.
- SURF1 : objet de type *MAILLAGE* et désigne le premier support du super-élément.
- SURF2 : objet de type *MAILLAGE* et désigne le deuxième support du super-élément.
- INTE : mot clef pour désigner que le domaine est intérieur à la surface.
- EXTE : mot clef pour désigner que le domaine est extérieur à la surface.
- AUTO : La définition d'un point intérieur à la surface se fait automatiquement.
- MANU : La définition d'un point intérieur à la surface se fait manuellement.
- PO : Objet de type POINT désignant le point rentré manuellement.

C. 1.2 Structuration de l'opérateur EIVAR

La notion de *segment* permet de donner la structure OBJET au langage ESOPE. En effet un *segment* est un regroupement de variables FORTRAN, il est référencé par un pointeur. La connaissance de cette variable pointeur nous permet d'accéder à toutes les variables contenues dans le *segment*. Celui-ci peut être utilisé comme mémoire de travail ou comme support d'information. Dans le premier cas, le segment peut être supprimé à la fin du sous programme dans lequel il est appelé, ce qui permet de libérer dynamiquement de la mémoire. Dans le deuxième cas cité, le segment est désactivé pour rendre utilisable la mémoire vive qu'il occupe. Si l'on désire s'en resservir dans un autre sous programme, il suffit de le réactiver. La structure des objets supportant le *maillage*, la *rigidité*, les *coordonnées*, etc... est définie dans des *includes* qu'on appelle au début du sous programme dans lequel, ces objets seront utilisés. Les objets de CAST3M sont supportés par des *segments*. C'est ainsi que l'objet *MAILLAGE* par exemple, est supporté par le segment MELEME et est appelé dans chaque sous programme dans lequel le maillage est appelé à être lu, modifié, dupliqué, etc... De même pour les objets des coordonnées, de la

rigidité, etc... EIVAR appelle le sous programme coeur EIVINT où sont effectuées l'ensemble des opérations d'intégration et de construction des différentes matrices $B_{\alpha\beta}$ et $D_{\alpha\beta}$. Il fait, entre autre, appel et avant toute intégration aux sous programmes suivants :

- ◊ EIGAUS : sous programme où sont stockés les points et poids de Gauss.
- ◊ EIXSIN : sous programme qui effectue le passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées intrinsèques à chaque élément de frontière.
- ◊ EISNOR : sous programme qui impose sur chaque élément le sens de la normale sortante. Nous reviendrons un peu plus loin sur la manière dont a été mis au point ce sous programme.
- ◊ EINDDL : sous programme qui affecte à chaque degré de liberté en déplacement ou en tension une position dans les vecteurs correspondants. Cette procédure est appelée une fois et une seule avant de commencer les intégrations. Dans ce sous programme est effectué également le dédoublement automatique des noeuds en tensions lorsqu'il y a discontinuités de tensions, au niveau des arêtes et des coins. Ce sous programme sera également détaillé.
- ◊ EIVIP : sous programme où sont évalués l'inversion et le produit matriciels $B_{tt}^{-1}B_{tu}$.
- ◊ EIVPM : sous programme où est évalué le produit matriciel $B_{ut}B_{tt}^{-1}B_{tu}$.
- ◊ EIVSM : sous programme où on effectue la soustraction : $B_{ut}B_{tt}^{-1}B_{tu} - B_{uu}$.

Suite à l'appel de ces différentes sous programmes, la matrice K est formée, il ne nous reste plus qu'à créer un nouvel objet de type *RIGIDITÉ*. Cet objet permet d'associer la rigidité ainsi calculée au maillage du super-élément intégral. Ce dernier doit être constitué d'un élément unique, il s'avère donc nécessaire de créer un nouvel objet de type *MAILLAGE* qui ne soit réduit qu'à ce seul élément de type surfacique.

C. 2 Création du nouvel objet rigidité

Dans CAST3M l'objet *RIGIDITÉ* est supporté par les segments MRIGID, XMATRI, IMATRI, DESCR, IMGEO. Toute opération s'y rattachant passe d'abord par l'appel à l'include INC SMRIGID.

- ◊ Le segment DESCR contient les tableaux :
 - LISINC : où est définie la nature des inconnues primales de la matrice de rigidité.
 - LISDUA : où est définie la nature des inconnues duales de la matrice de rigidité.

- NOELEP : tableau où l'on affecte chaque inconnue primale au noeud correspondant.
- NOELED : tableau où l'on affecte chaque inconnue duale au noeud correspondant.

La géométrie du super-élément intégral étant composée d'un élément unique à $NBRN$ noeuds géométriques, pour le noeud i , les inconnues correspondantes dans les trois directions sont :

- ◊ la $(3i - 2)$ ème inconnue primale est U_x et la duale est F_x .
- ◊ la $(3i - 1)$ ème inconnue primale est U_y et la duale est F_y .
- ◊ la $(3i)$ ème inconnue primale est U_z et la duale est F_z .

Après avoir initialisé le segment DESCR, nous avons procédé à la construction des différents tableaux cités dessus comme suit :

- ◊ Boucle sur les noeuds : $I = 1, NBRN$ ($J = 3(I - 1)$)
 - Remplissage du tableau LISINC
 - LISINC(J+1)= U_x
 - LISINC(J+2)= U_y
 - LISINC(J+3)= U_z
 - Remplissage du tableau LISDUA
 - LISDUA(J+1)= F_x
 - LISDUA(J+2)= F_y
 - LISDUA(J+3)= F_z
 - Remplissage du tableau NOELEP
 - NOELEP(J+1)=I
 - NOELEP(J+2)=I
 - NOELEP(J+3)=I
 - Remplissage du tableau NOELED
 - NOELED(J+1)=I
 - NOELED(J+2)=I
 - NOELED(J+3)=I
- ◊ Fin de la boucle sur les noeuds.
- ◊ Le segment IMATRI contenant le tableau IMATTT
 - IMATTT(K)=IPO est le pointeur sur le segment de type XMATRI contenant la matrice de rigidité, K étant le nombre d'objets élémentaires du maillage considéré et est égal à 1 dans notre cas, puisque, le maillage du super élément intégral n'est constitué que d'un seul et unique élément.

- ◇ Le segment **XMATRI** est le segment qui contient les valeurs de la matrice de rigidité.
- ◇ Le segment **MRIGID** est le segment qui contient les tableaux **COERIG**, **IRIGEL**.
 - Remplissage du tableau **COERIG**.
COERIG(K)=1 désigne un coefficient multiplicateur.
 - Remplissage du tableau **IRIGEL**.
IRIGEL(1,K) est le pointeur sur l'objet géométrie.
IRIGEL(2,K)=0 car il n'y a pas de géométrie en frottement.
IRIGEL(3,K)=DESCR
IRIGEL(4,K)=IMATRI
IRIGEL(5,K)=0
IRIGEL(6,K)=0 correspond à la nature de la relation définissant la géométrie, dans notre cas, c'est l'égalité.
IRIGEL(7,K)=0 si la matrice est symétrique et c'est le cas de la matrice dérivant de l'approche variationnelle de Galerkin.
IRIGEL(7,K)=1 si la matrice n'est pas symétrique et c'est le cas de la matrice dérivant de l'approche par collocations.

Nous définissons le type de la matrice ainsi créée comme étant une rigidité, en posant que **MTYMAT=RIGIDITÉ**. Pour associer le nouvel objet de type rigidité ainsi créée à la variable **GIBIANE** correspondante, nous appelons le sous programme **ECROBJ**.

◇ **CALL ECROBJ(RIGIDITÉ, MRIGID)**

Ce sous programme sert à rendre le résultat de type rigidité et de valeur associée **MRIGID**.

C. 3 Sous programme EISNOR

Dans les formulations intégrales, nous avons vu que la normale en chaque point doit être sortante du domaine considéré. Négliger cette hypothèse peut être source d'erreurs importantes. Il a fallu donc construire un algorithme qui veille à ce que cette exigence soit parfaitement respectée en tout point de chaque élément d'intégration. Cet algorithme est construit dans le sous programme **EISNOR**. Pour cela, il convenait de veiller au sens de rotation de la numérotation locale des noeuds composant chaque élément. On devait respecter impérativement le sens de rotation trigonométrique, l'élément étant vu de l'extérieur. Le mailleur de **CAST3M** ne respecte pas cette condition et affecte aux différents éléments un sens de numérotation aléatoire. Le développement du sous programme **EISNOR** nous a permis de détecter pour chaque élément le

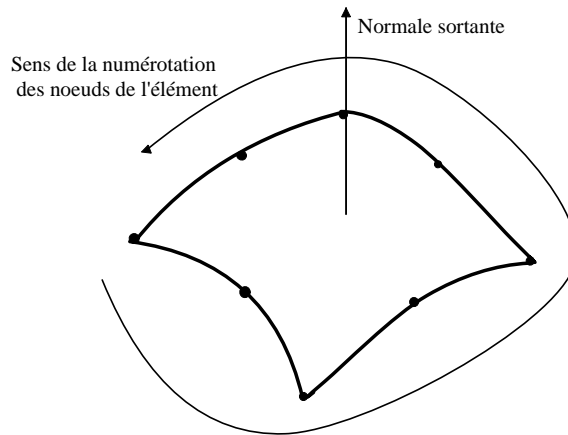


Figure C.1 : Définition du sens de la normale sortante

sens de numérotation locale des noeuds et de stocker l'information dans le segment **NORMEL** pour l'utiliser un peu plus loin dans le programme.

Le sous programme **EISNOR** est appelé une seule fois, depuis le sous programme **EIVAR** avant le sous programme **EIVINT** des intégrations.

C. 3.1 Principe de l'algorithme

VARIABLES D'ENTRÉES.

MELEME : désigne le pointeur sur le segment **MELEME** correspondant au maillage de surface du super-élément.

ICLE1 : pointeur sur le mot clé pour préciser si le domaine est intérieur ou extérieur à la surface et s'il est infini.

ICLE2 : pointeur sur le mot clé qui précise si le point intérieur est choisi automatiquement (barycentre des noeuds géométriques) ou si on doit avoir recours à une définition manuelle de ce point.

IPCEN : est le pointeur sur le point intérieur éventuel, renté manuellement.

VARIABLES DE SORTIES

NORMEL : désigne le pointeur sur le tableau **ISENS**, qui définit le sens de rotation de chaque élément. Pour l'élément **I**, nous avons :

- ◊ **ISENS(I)=+1** si le sens est trigonométrique, avec une vue de l'extérieur sur l'élément

◇ $\text{ISENS}(\text{I})=-1$ dans le cas contraire.

L'algorithme est basé sur le principe qui considère que tous les éléments d'une surface, vus de l'extérieur, ont le même sens de rotation lors de la numérotation des noeuds. Cette condition est satisfaite si et seulement si le long de tout coté commun aux deux éléments, les sens de parcours correspondants à ces deux éléments sont opposés.

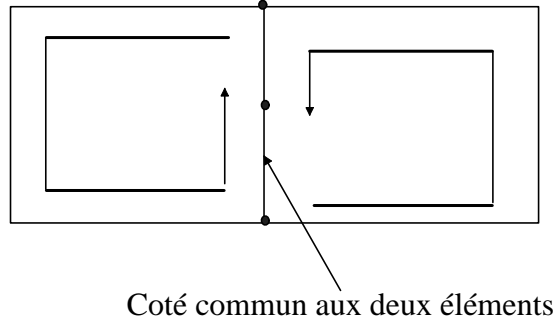


Figure C.2 : Sens de parcours opposés le long du coté en commun à deux éléments.

L'algorithme consiste à partir d'un élément de référence, pour lequel on connaît le sens de numérotation, et à déterminer le sens de rotation des 3 ou 4 éléments voisins par l'examen des sens de parcours relatifs des cotés de l'élément. Chaque nouvel élément dont le sens est ainsi déterminé peut permettre de définir le sens de ses éléments voisins ainsi de suite.. Chaque élément susceptible de renseigner les éléments voisins est inscrit dans une liste. Un élément dont on a épuisé les renseignements est supprimé de la liste. Une fois que le sens de numérotation des noeuds de chaque élément est déterminé, il reste à vérifier que la normale est sortante en chaque élément, si tel n'est pas le cas, une inversion du sens de la normale sur tous les éléments s'impose. Pour ce faire, il est utile d'estimer le flux \mathcal{F} traversant la surface totale du maillage, issu d'une source unitaire placée en un point intérieur du domaine, dans ce cas précis $\|\mathcal{F}\| \simeq +1$. Si le flux calculé est négatif, c'est à dire que $\|\mathcal{F}\| \simeq -1$, alors le sens de la normale de tous les éléments doit être inversée. Par contre si le flux calculé est proche de zéro, alors un message d'erreur s'affiche indiquant que le barycentre ou le point rentré manuellement est extérieur à la surface du super-élément.

CALCUL DU FLUX.

Soit E un élément du domaine, de surface S_E et à travers lequel le flux \mathcal{F} est évalué. soit C_E de coordonnées $(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$ son centre. Le point intérieur du domaine considéré est désigné

par G. Notons r_g la distance entre les deux points C_E le centre de l'élément considéré, à travers lequel on évalue le flux. Dans ce cas le flux est donné par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\pi} \int_{S_E} \frac{1}{r_g^3} \vec{n} \cdot \vec{r}_g \text{ISENS}(E) J_y(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{C.1})$$

Il ne reste plus qu'à mettre le segment NORMEL en sortie pour une utilisation ultérieure. Ce sens de la normale ISENS(I) sera multiplié aux composantes de la normale en chaque élément, déterminées dans les sous programmes EIVNOY1 et EIVNOY2 qui calculent les composantes tenseurs de Kelvin en déplacements U_i^k , en tension T_i^k ainsi que celles du tenseur B_{iqks} .

C. 4 Sous programme EINDDL

Au stade de la construction des matrices B_{uu} , B_{ut} , B_{tu} , B_{tt} , il est nécessaire de connaître l'emplacement de chaque degré de liberté en déplacement et en tension dans les vecteurs correspondants. EINDDL est appelé une seule fois avant même d'appeler le sous programme EIVINT où l'on effectue les différentes intégrations et la construction matricielle. A cet effet, les tableaux IDU et IDT contenus dans le segment MDDL sont créés pour associer directement à chaque degré de liberté en déplacement et en tension sa position correspondante dans les matrices B_{uu} , B_{ut} et B_{tt} . Ce sous programme effectue également le dédoublement automatique des noeuds en tensions, lorsqu'il y a discontinuité du vecteur tension, en utilisant un critère de discontinuité de la normale. Lorsqu'il y a discontinuité de tension en un noeud, on définit des *familles* d'éléments pour lesquelles la tension est continue.

C. 4.1 Principe de l'algorithme

Ce sous programme utilise comme variables d'entrées le pointeur sur le maillage de surface du super élément, le pointeur sur le segment NORMEL qui donne le sens sortant de la normale en chaque élément, ainsi que le pointeur sur les coordonnées intrinsèques de chaque élément. En variable de sortie, le sous programme EINDDL présente le pointeur sur le segment MDDL correspondant aux positions des ddl en déplacements et en tensions dans les différentes matrices. Dans ce sous programme nous avons déclaré deux segments :

- ◇ Le segment MDDL.
- ◇ Le segment MEMCOMPT.

Le segment MDDL contient les variables IDU et IDT sous forme de tableaux. Ainsi la valeur $IDU(Numelem, Numnoeud, Numdir)$ est égale à la position, dans la tableau des déplacements \mathbf{u} , de la composante en déplacement de direction numéro $Numdir$ ($Numdir=1, 3$) du noeud local

numéro $Numnoeud$ ($Numnoeud=1, 8$) de l'élément numéro $Numelem$ ($Numelem=1$, Nombre total d'éléments). Ce segment sera la variable de sortie du sous programme et sera directement utilisé dans le sous programme EIVINT, lors de la construction des différentes matrices. Nous avons suivi les étapes suivantes :

- ◊ Comptage du nombre total d'éléments de la géométrie et création du segment MDDL.
- ◊ Comptage du nombre total des noeuds de la géométrie et création du segment MEM-COMPT. Ce segment est utilisé comme mémoire de travail, sera appelé le long du sous programme pour être enfin supprimé à la fin de ce dernier.

Les tableaux IDU et IDT sont construits en suivant les étapes suivantes :

- ◊ Boucle sur les éléments surfaciques E_e
 - Boucle sur les noeuds géométriques N_e .
 - ‡ *Début de test pour les noeuds en déplacement :*
 - si le noeud est rencontré pour la première fois alors:
 - * Boucle sur les trois directions $i=1, 3$
 - Création des 3 positions dans le tableau IDU.*
 - * Fin de boucle sur les directions
 - ‡ *Fin de test pour les noeuds en déplacement*
 - Fin de boucle sur les noeuds géométriques
- ◊ Fin de boucle sur les éléments.

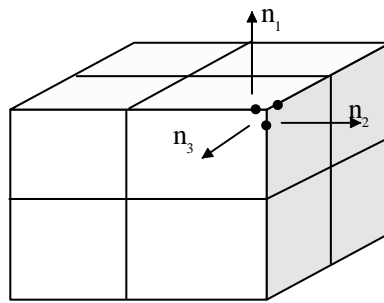


Figure C.3 : Définition de trois noeuds au niveau d'un coin.

Le vecteur tension, fonction linéaire de la normale unitaire est discontinu au passage de singularités géométriques, telles que arêtes, coins. Pour les noeuds supportant les tensions l'algorithme tient compte en plus de cette éventuelle discontinuité au passage des arêtes ou

des coins. C'est ainsi qu'à l'intérieur des mêmes boucles sur les éléments et sur les noeuds géométriques précédentes, nous avons inclus le calcul des composantes de la normale à chaque noeud considéré. Si le test révèle que lors de la première rencontre du noeud N_i , sa normale était \mathbf{n}_1 et que celle-ci devient $\mathbf{n}_2 \neq \mathbf{n}_1$ quand on a rencontré le même noeud N_i une seconde fois. Nous nous sommes proposés donc d'évaluer l'angle $\theta(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ entre les deux normales en nous fixant un angle seuil $\theta = \frac{\pi}{6}$ au delà duquel nous procéderons à un dédoublement du noeud.

Annexe D

Solutions fondamentales de Mindlin

Dans cette annexe, nous nous proposons de donner les différentes expressions des solutions complémentaires que nous avons introduites dans le chapitre (VII).

Soit \mathbf{x}^* est le point *symétrique* du point d'application de la force \mathbf{x} par rapport $\partial\Omega$ (plan $y_3 = 0$). R est la distance euclidienne entre les points \mathbf{y} et \mathbf{x}^* , $R = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\|$.

Les solutions fondamentales complètes repectivement en déplacements et en contraintes pour le demi-espace sont donc données par :

$$\bar{U}_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \check{U}_i^k(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \check{\Sigma}_{ij}^k(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (\text{D.2})$$

La solution $U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\Sigma_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont les solutions de Kelvin en déplacements respectivement en contraintes données par (II.13) et (II.14). Les formes explicites des solutions fondamentales complémentaires en déplacements $\check{U}_i^k(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ sont données par :

$$\check{U}_3^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = A \left[\frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2y_3x_3}{R^3} + \frac{6y_3x_3R_3^2}{R^5} \right] \quad (\text{D.3})$$

$$\check{U}_a^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = A r_a \left[\frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6y_3x_3R_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right] \quad (\text{D.4})$$

$$\check{U}_3^a(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = A r_a \left[\frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6y_3x_3R_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right] \quad (\text{D.5})$$

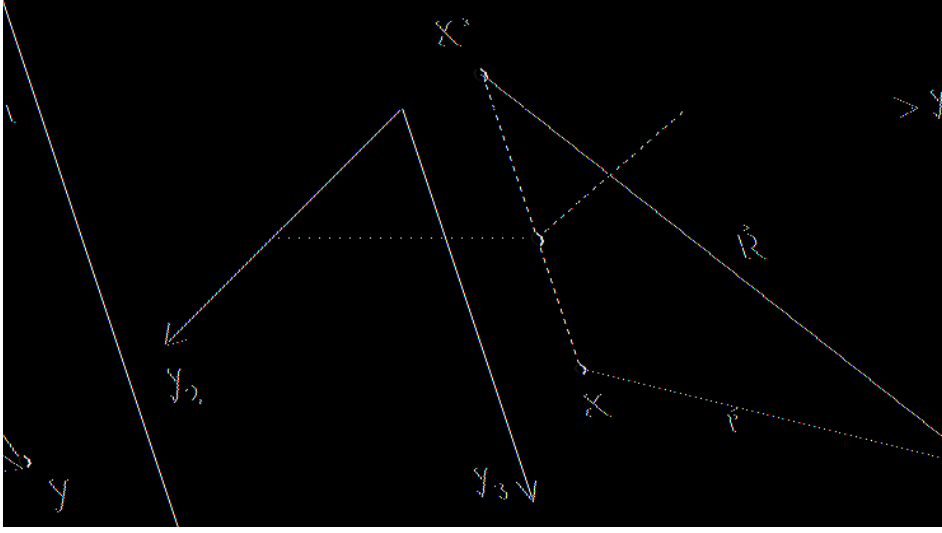


Figure D.1 : Demi-espace : définition du point courant \mathbf{y} , du point source \mathbf{x} et de son image \mathbf{x}^* .

$$\begin{aligned} \check{U}_1^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & A \left[\frac{1}{R} + \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2y_3x_3}{R^3} \left(1 - 3\frac{r_1^2}{R^2} \right) \right] \\ & + A \left[\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(R+R_3)} \left(1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \check{U}_2^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & A \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{1}{R} - \frac{(3-4\mu)r_2^2}{R^3} + \frac{2y_3x_3}{R^3} \left(1 - 3\frac{r_2^2}{R^2} \right) \right] \\ & A \left[\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(R+R_3)} \left(1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\check{U}_1^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = A r_1 r_2 \frac{r_1 r_2}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(3-4\mu)}{R^3} - \frac{6y_3x_3R_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)^2}{R(R+R_3)} \right] \quad (\text{D.8})$$

$$= \check{U}_2^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (\text{D.9})$$

sachant que :

$$A = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \quad a = 1, 2$$

Les expressions des solutions complémentaires en contraintes sont les suivantes :

$$\check{\Sigma}_{33}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = B \left[\frac{(1-2\nu)}{R^3} r_3 - 3 \frac{(3-4\nu)R_3^2 y_3 - R_3 x_3 (5y_3 - x_3)}{R^5} - \frac{30y_3 x_3 R_3^3}{R^7} \right] \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}_{3a}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \check{\Sigma}_{a3}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \\ &= B r_a \left[\frac{(1-2\nu)}{R^3} r_3 - 3 \frac{(3-4\nu)R_3 y_3 - x_3 (3y_3 + x_3)}{R^5} - \frac{30y_3 x_3 R_3^2}{R^7} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{11}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B \left[\frac{(1-2\nu)}{R^3} (3r_3 - 4\nu R_3) + 3 \frac{2x_3 R_3 (y_3 - 2\nu R_3) - (3-4\nu)r_3 r_1^2}{R^5} \right] \\ & - B \left[\frac{30y_3 x_3 R_3 r_1^2}{R^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_1^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_3} \right) \right] \right]\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{22}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B \left[\frac{(1-2\nu)}{R^3} (3r_3 - 4\nu R_3) + 3 \frac{2x_3 R_3 (y_3 - 2\nu R_3) - (3-4\nu)r_3 r_2^2}{R^5} \right] \\ & - B \left[\frac{30y_3 x_3 R_3 r_2^2}{R^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_2^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_3} \right) \right] \right]\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{12}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & \check{\Sigma}_{21}^3(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \\ = & B r_1 r_2 \left[-3(3-4\nu) \frac{r_3}{R^5} - \frac{30y_3 x_3 R_3}{R^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_3} \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

$$\check{\Sigma}_{33}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = B r_1 \left[-\frac{(1-2\nu)}{R^3} r_3 - 3 \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2x_3(x_3 + (1-2\nu)R_3)}{R^5} + \frac{30y_3 x_3 R_3^2}{R^7} \right]\quad (\text{D.15})$$

$$\check{\Sigma}_{33}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = B r_2 \left[-\frac{(1-2\nu)}{R^3} - 3 \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2x_3(x_3 + (1-2\nu)R_3)}{R^5} + \frac{30y_3 x_3 R_3^2}{R^7} \right]\quad (\text{D.16})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{22}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B r_1 \left[\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - 3 \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2x_3(x_3 + (1-2\nu)R_3)}{R^5} \right] \\ & + B r_1 \left[\frac{30y_3 x_3 r_2^2}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R+R_3} \right) \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{11}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B r_2 \left[\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - 3 \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2x_3(x_3 + (1-2\nu)R_3)}{R^5} \right] \\ & + B r_2 \left[\frac{30y_3 x_3 r_1^2}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R+R_3} \right) \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{11}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B r_1 \left[\frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - 3 \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + 6 \frac{x_3}{R^5} \left(2\nu R_3 - 3y_3 + 5 \frac{x_3 r_1^2}{R^2} \right) \right] \\ & - B r_1 \left[\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left(3 - \frac{r_1^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R+R_3} \right) \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{22}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B r_2 \left[\frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - 3 \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + 6 \frac{x_3}{R^5} \left(2\nu R_3 - 3y_3 + 5 \frac{x_3 r_2^2}{R^2} \right) \right] \\ & - B r_2 \left[\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left(3 - \frac{r_2^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R+R_3} \right) \right) \right]\end{aligned}$$

$$\check{\Sigma}_{13}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = B \left[\frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - 3(3-4\nu) \frac{r_1^2 R_3}{R^5} + \frac{6x_3}{R^5} ((1-2\nu)r_1^2 - y_3 R_3) + \frac{30x_3 y_3 r_1^2 R_3}{R^7} \right]\quad (\text{D.19})$$

$$= \check{\Sigma}_{31}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})\quad (\text{D.20})$$

$$\begin{aligned}\check{\Sigma}_{12}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = & B r_2 \left[\frac{(1-2\nu)}{R^3} - 3(3-4\nu) \frac{r_1^2}{R^5} - \frac{6x_3 y_3}{R^5} \left(1 - 5 \frac{r_1^2}{R^2} \right) \right] \\ & - B r_2 \left[\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R+R_3} \right) \right) \right] \\ = & \check{\Sigma}_{21}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})\end{aligned}\quad (\text{D.21})$$

$$\check{\Sigma}_{23}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \check{\Sigma}_{32}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = Br_1r_2 \left[-3(3-4\nu)\frac{R_3}{R^5} - \frac{6x_3}{R^5} \left(1-2\nu + \frac{5y_3R_3}{R^2} \right) \right] \quad (\text{D.22})$$

$$\check{\Sigma}_{12}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \check{\Sigma}_{21}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \frac{r_1}{r_2} \check{\Sigma}_{12}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (\text{D.23})$$

$$\check{\Sigma}_{13}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \check{\Sigma}_{31}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \check{\Sigma}_{23}^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (\text{D.24})$$

$$\check{\Sigma}_{23}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = B \left[(1-2\nu)\frac{r_3}{R^3} - 3(3-4\nu)\frac{r_2^2R_3}{R^5} + \frac{6x_3}{R^5} \left((1-2\nu)r_2^2 - y_3R_3 + \frac{30x_3y_3r_2^2R_3}{R^7} \right) \right] \quad (\text{D.25})$$

$$= \check{\Sigma}_{32}^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (\text{D.26})$$

avec

$$B = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad a = 1, 2$$